ÜBER KAMPFMODELLE

insbesondere über Abnutzungsmodelle auf der Basis von Lanchester-Gleichungen

von

WOLFGANG SCHIKOWSKI

1970

INAUGURAL—DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Wirtschaftswissenschaften

(doctor rerum politicarum)

der

Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät

der Universität des Saarlandes

über das Thema

ÜBER KAMPFMODELLE
insbesondere über Abnutzungsmodelle auf der Basis von Lanchester-Gleichungen

von

WOLFGANG SCHIKOWSKI

Lingen (Ems) 1971

Tag der Disputation: 06.02.1970

zu dieser Zeit amtierender Dekan: Dr. Hax

Berichterstatter: 1. Dr. Menges
2. Dr. Schneeweiß

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

		Seite:
	Einleitung	1
1.	Abnutzungsmodelle	4
1.1.	Wahrscheinlichkeitstheoretische Formulierung des Modells	4
1.1.1.	Voraussetzungen der Analyse	4
1.1.2.	Kampfwert und Vernichtungswahrscheinlichkeit	6
1.1.3.	Lanchester-Gleichungen = Erwartungswerte von Binomialverteilungen	10
1.1.4.	Aussagekraft der Erwartungswerte	18
1.2.	Analyse der Kampfwerte	23
1.2.1.	Grundsätzliche Überlegungen und Prämissen	23
1.2.2.	Trefferwahrscheinlichkeit	24
1.2.3.	Beschußrate	31
1.2.4.	Kampfwerte für unterschiedliche Kampfsituationen	35
1.2.5.	Schätzung der Auswirkung der Faktoren, die nicht beobachtet oder analytisch erfaßt werden können	43
1.3.	Unterschiede in den Kampfwerten der Einheiten einer Streitkraft	47
1.3.1.	Einführende Überlegungen	47
1.3.1.1.	Ursachen der unterschiedlichen Kampfwerte	47
1.3.1.2.	Äquivalenzziffern	49
1.3.2.	Berücksichtigung der unterschiedlichen Kampfwerte mit Hilfe der Erwartungswerte der Binomialverteilung	50
1.3.2.1.	Aufbau des Modells	50
1.3.2.2.	Anwendungsmöglichkeiten	58

Seite:

1.3.2.3.	Statische Lösung des Gleichungssystems	60
1.3.2.4.	Probleme des Schätzens der A_{ij} und B_{ji}	61
1.3.2.5.	Kampfwerte in Abhängigkeit von der räumlichen Verteilung der Einheiten	64
1.3.3.	Das Modell von Dashiell und Fain	68
1.3.3.1.	Die Methode	68
1.3.3.2.	Ergänzung	71
1.3.3.3.	Vergleich mit der Methode der Erwartungswerte der Binomialverteilung	75
1.4.	Der optimale Einsatz knapper militärischer Mittel	77
1.4.1.	Die Wahl des Bewertungsmaßstabes	77
1.4.1.1.	Erfüllung des militärischen Auftrages als übergeordnetes Ziel	77
1.4.1.2.	Eigenschaften des Bewertungsmaßstabes	78
1.4.1.3.	Der Bewertungsmaßstab in der Wirtschaftstheorie	78
1.4.2.	Analoge Anwendung des mikroökonomischen Verfahrens	80
1.4.2.1.	Kostenkurven und Kurven gleicher militärischer Wirksamkeit	80
1.4.2.2.	Verschiedene Wirksamkeitskonzeptionen	82
1.4.2.3.	Nich-zufällige Reihenfolge der Vernichtung der Objekte im Zielgebiet	85
1.4.2.4.	Beurteilung der Verwendbarkeit des mikroökonomischen Verfahrens im militärischen Bereich	88
1.4.3.	Lineare Optimierung	90
1.4.3.1.	Grundsätzliche Wertprobleme	90
1.4.3.2.	Die Bestimmung des Optimums	91
1.4.3.3.	Suboptimum und Ausweitung der Anwendungsmöglichkeiten	101

Seite:

2.	Die Theorie der stochastischen Duelle	103
2.1.	Gegenüberstellung von Abnutzungstheorie und Theorie der stochastischen Duelle	103
2.2.	Das fundamentale Duell	104
2.2.1.	Das fundamentale Duell mit konstanten Zeitintervallen zwischen den einzelnen Schüssen	104
2.2.1.1.	Gleiche Intervalle für beide Seiten	104
2.2.1.2.	Verschieden große Intervalle für beide Seiten	107
2.2.2.	Das fundamentale Duell mit zufällig verteilten Zeitintervallen zwischen den einzelnen Schüssen	108
2.3.	Der unentschiedene Ausgang des Duells	115
2.3.1.	Definition des unentschiedenen Ausgangs	115
2.3.2.	Der Abbruch des Duells	116
2.3.2.1.	Begrenzter Munitionsvorrat	116
2.3.2.2.	Begrenzte Zeitdauer	118
2.3.3.	Die Vernichtung beider Duellanten	119
2.3.3.1.	Das klassische Duell	119
2.3.3.2.	Das gleichzeitige Feuern im Verlauf eines Duells mit konstanten Zeitintervallen zwischen den einzelnen Schüssen	120
2.3.3.3.	Berücksichtigung der Flugzeit der Geschosse	121
2.4.	Erweiterungen des Modells	122
2.4.1.	Möglichkeiten der Erweiterung	122
2.4.2.	Veränderliche Trefferwahrscheinlichkeiten	123
2.4.3.	Erhöhung der Zahl der Teilnehmer	124
2.4.4.	Logistische Gesichtspunkte	127
2.5.	Beurteilung der Theorie der stochastischen Duelle	128

Seite:

3.	Anwendungsmöglichkeiten der Spieltheorie	130
3.1.	Einführende Überlegungen	130
3.2.	Spieltheoretische Modelle auf der Grundlage der Abnutzungstheorie	132
3.2.1.	Gewinn und Verlust	132
3.2.2.	Das Ende des Spiels	133
3.2.3.	Bestimmung der Strategien	134
3.2.4.	Möglichkeiten der Ausdehnung	136
3.3.	Andere spieltheoretische Modelle	137
3.3.1.	Landkriegführung	137
3.3.2.	Luftkriegführung	138
3.4.	Beurteilung	140
Anhang 1:	Statische Lösung von Gl.(8)	142
Anhang 2:	Auflösung von Gl.(9) nach t	143
Anhang 3:	Lösung von Differentialgleichungen	144
Literaturverzeichnis		154

Einleitung

Die folgende Arbeit befaßt sich mit dem menschlichen Zusammenleben in einer seiner extremen Formen, nämlich mit der Lösung von Gegensätzen durch Anwendung von Gewalt.

Ausgangspunkt sind drei fundamentale Annahmen, deren Gültigkeit für Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft gleichermaßen unterstellt wird:

- Es gibt in der menschlichen Gesellschaft unversöhnlichen Streit.
- Die Menschen versuchen, diesen Streit mit militärischen Machtmitteln zu entscheiden. [1)]
- Die Positionen in einem solchen Streit sind stets diametral entgegengesetzt, d.h. es stehen sich immer zwei Parteien feindlich gegenüber.

Trotz der Tatsache, daß auf jeder Seite eine Vielzahl von Menschen beteiligt sein kann, wird diese Art der Lösung von Interessenkonflikten gedacht als ein "Zweikampf zwischen zwei Ringenden" [2)], da die Individuen einer jeden Seite im Handeln durch einen Willen geeint werden, sich folglich in ihren Taten nur ein Wille manifestiert.

Bei dem gewählten Ausgangspunkt kann es nicht Aufgabe dieser Arbeit sein, zu untersuchen, inwieweit kriegerische Auseinandersetzungen überhaupt vermieden werden können; es soll auch nicht untersucht werden, ob der wesentliche

---

1) Vgl. dazu: Brackney, H.: The Dynamics of Military Combat; Operations Research (OR), vol. 7 1959, S. 30

2) Clausewitz, C.v.: Vom Kriege; 16.Aufl. Bonn 1952

Bestandteil des Krieges, die Anwendung von Gewalt [3], moralisch gerechtfertigt werden kann oder nicht.

Gegenstand dieser Arbeit ist vielmehr die Untersuchung einiger Aspekte des Krieges, unabhängig von seiner Vermeidbarkeit oder seiner Vertretbarkeit.

Die Ebene der Untersuchung ist dabei in der Regel die der unteren und mittleren Führung. Gesichtspunkte der Gesamtkriegsführung werden nicht berücksichtigt. Auch sind die gewonnenen Ergebnisse, bis auf wenige Ausnahmen, nicht ohne weiteres auf höhere Ebene übertragbar. Auf der anderen Seite wird aber auch nur in wenigen Fällen das Aggregationsniveau so weit herabgesetzt, daß das Kampfgeschehen auf ein Duell reduziert wird, in welchem sich nur zwei Individuen gegenüberstehen.

Die Untersuchung wird, wo immer dies möglich ist, quantitativ durchgeführt. Damit wird das Ziel verfolgt, Methoden zu entwickeln, welche in dem Sinne operabel sind, daß sie dem militärischen Führer helfen, in vernünftiger Weise die notwendigen Entscheidungen zu treffen, es ihm ermöglichen, aus der Vielzahl der möglichen Handlungen die optimale zu wählen. Um dieses Ziel zu erreichen, werden drei verschiedene Wege beschritten:

Zunächst werden die Lanchester-Gleichungen, welche das Kampfgeschehen im Zeitablauf beschreiben, so formuliert, daß sie der Wirklichkeit besser entsprechen als in ihrer ursprünglichen Form. Das wird zum einen durch ihre Stochastisierung, zum anderen durch die Berücksichtigung der Tatsache, daß sich eine Streitkraft aus verschiedenartigen Elementen zusammensetzt, erreicht. Dann wird versucht, einmal durch analoge Anwendung von Erkenntnissen aus der Mikroökonomik, darauf mit Hilfe der Methode des linearen

---

3) Clausewitz, C.v., op.cit. S.89

Optimierens, Kriterien für den Einsatz der knappen militärischen Mittel zu finden.

Es folgt die Vorstellung der Theorie der stochastischen Duelle, welche als militärische Variante der Warteschlangen-Theorie betrachtet werden kann. Sie ist bezogen auf kleine und kleinste Kampfhandlungen, zeichnet sich dort aber durch den Vorzug relativ zuverlässiger und sicherer Aussagen aus.

Schließlich wird ein spieltheoretisches Modell entwickelt, welches Erkenntnisse aus dem ersten Teil dieser Arbeit als Basis hat.

Der Versuch, Kampfgeschehen mit Hilfe von Diffusionsmodellen zu beschreiben, wurde, obgleich dieser Ansatz erfolgversprechend zu sein scheint, abgebrochen. Die bruchstückhaften Ergebnisse dieses Bemühens haben keine Aufnahme in diese Arbeit gefunden, vor allem deswegen, weil die Abnutzungsmodelle die gleichen Erkenntnisse auf sichererem Wege in besserer Form bringen.

Sowohl die Methode des linearen Optimierens als auch die Spieltheorie hätten eine umfassendere Anwendung finden können, wenn lediglich formale Kriterien berücksichtigt worden wären. Da es aber nicht gelungen ist, eine vernünftige und vertretbare umfassende Wertfunktion aufzustellen oder aber in der Literatur zu finden, wurde darauf verzichtet.

Da die Ergebnisse dieser Arbeit aufgrund des behandelten Gegenstandes nicht durch Versuchsreihen erhärtet werden können, da die verfügbaren Daten aus der Vergangenheit nicht von der erforderlichen statistischen Genauigkeit sind, wurde der Versuch der Verifizierung nicht unternommen.

Der Verfasser ist Herrn Prof.Dr.Günter Menges und Herrn Dr.Martin Rutsch für die bei der Anfertigung der Arbeit bereitwillig geleistete Führung und Unterstützung dankbar.

1. Abnutzungsmodelle

1.1. Wahrscheinlichkeitstheoretische Formulierung

1.1.1. Voraussetzungen der Analyse

Es wird davon ausgegangen, daß zwei Streitkräfte sich feindlich gegenüberstehen und zu einem bestimmbaren Zeitpunkt mit kriegerischen Handlungen beginnen.

Das Ziel der kriegerischen Handlung, der Kampfhandlung, wird für beide Seiten gleichermaßen mit der Vernichtung der gegnerischen Streitkräfte angenommen.

Dabei besteht jede der beiden Streitkräfte aus einer bestimmten Anzahl von Einheiten [4]. Als vernichtet soll eine Streitkraft dann angesehen werden, wenn all ihre Einheiten vernichtet sind.

Unter Vernichten einer Einheit ist zu verstehen: das Versetzen dieser Einheit in einen solchen Zustand, daß von ihr der Kampf nicht mehr fortgesetzt werden kann [5], ein Hindern dieser Einheit an der Ausübung ihrer Funktion [6].

Es wird zunächst angenommen, daß jede der beiden Streitkräfte in sich aus Einheiten besteht, die sich bezüglich Funktion, Ausbildungsstand, Ausrüstung, Bewaffnung, Kampfmoral etc., also bezüglich ihrer Kampfkraft nicht unterscheiden. Dagegen ist es durchaus möglich, daß sich eine beliebige Einheit der einen Streitkraft bezüglich der Kampfkraft von einer beliebigen Einheit der anderen Streitkraft unterscheidet.

---

4) Es wird darauf hingewiesen, daß hier unter dem Begriff Einheit der kleinste, nicht mehr sinnvoll aufteilbare Baustein der Streitkraft verstanden werden soll, also z.B. der einzelne Infanterist, der Panzer einschließlich der Besatzung, der Abfangjäger etc. Diese Begriffsbestimmung deckt sich nicht mit dem allgemeinen militärischen Sprachgebrauch.

5) Clausewitz, C.v., op.cit., S.113

6) Wentzel, J.: Operationsforschung; Berlin 1966, S.86

Es wird ferner angenommen, daß Verluste der einen Streitkraft nur durch die feindliche Einwirkung der anderen Streitkraft bewirkt werden und umgekehrt, daß sich also die Streitkräfte gegenseitig abnutzen. Diese Annahme ist bei länger dauernden kriegerischen Aktionen, in denen Stunden des eigentlichen Kampfes mit Wochen der relativen Ruhe abwechseln, sehr unrealistisch. Bis in die Gegenwart sind in den Kriegen die Verluste durch Krankheiten, Unfälle und Ähnliches, mit Ausnahme vielleicht von "Blitzkriegen", wie z.B.der 6-Tage-Krieg 1967 im Nahen Osten, größer gewesen als die Verluste durch Feindeinwirkung.

Für besondere militärische Verhältnisse, wie sie z.B.beim Einsatz von Abfangjägern gegeben sind, sind sogar während des Kampfeinsatzes die Verluste aus anderen Ursachen als denen der Feindeinwirkung die größeren.[7)]

Es wird schließlich angenommen, daß bis zur Entscheidung des Gefechtes durch Vernichtung einer der beiden Seiten keine der beiden Streitkräfte Verstärkungen durch Zuführung neuer Einheiten oder Schwächungen durch Abzug von bisher im Kampf stehenden Einheiten erfährt.[8)]

Dann ist der Kampf, den es zu beschreiben gilt, die Auseinandersetzung zwischen zwei Streitkräften Blau und Rot, deren Stärke in Einheiten mit M bzw. N bezeichnet werden soll.

Die Anzahl der Einheiten der blauen Streitkraft im Augenblick des Beginns des Kampfes wird bezeichnet mit M(0), die Anzahl der Einheiten zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt t mit M(t); entsprechendes gilt für Rot.

---

7) Eine eingehende Analyse dieser "operational losses" findet sich bei Bach,R.E.jr., Dolansky,L.und Stubbs,H.L Some Recent Contributions to the Lanchester Theory of Combat; OR,vol.1o, 1962, S.314 ff.

8) Engel,J.H.: A Verification of Lanchester's Law; OR,vol. 1954, S.163, berücksichtigt bei seiner Analyse des Kampfes um Iwo Jima ausdrücklich die von den Amerikanern herangeführten Verstärkungen.

Kampfwert und Vernichtungswahrscheinlichkeit

1.1.2. Nun besitzt jede rote bzw.jede blaue Einheit einen bestimmten Kampfwert, der sie in die Lage versetzt, in einer Zeiteinheit im Durchschnitt eine bestimmte Anzahl oder einen bestimmten Bruchteil von gegnerischen Einheiten zu vernichten.Dieser Kampfwert ist gegeben durch: 9)

A = Erwartungswert für den Bruchteil einer Einheit (oder die Anzahl von Einheiten) von Blau, der in einer Zeiteinheit von einer Einheit von Rot vernichtet wird.

Die Höhe dieser Kampfwerte ist, außer durch die Kampfkraft, die Vernichtungsfähigkeit der roten Einheit bezüglich der blauen Einheit, bestimmt durch die Länge der gewählten Zeiteinheit (Δt).

Wählt man ein sehr kurzes Intervall, so wird im Durchschnitt die Zeit für Rot nicht ausreichen, eine Einheit von Blau zu vernichten. Wird jedoch ein sehr langer Intervall gewählt, so hat die Einheit von Rot nach Vernichtung der ersten Einheit von Blau anschließend noch die Möglichkeit, sich gegen eine zweite Einheit von Blau zu wenden und auch diese zu vernichten etc.

Es ist also: $A = A(\Delta t)$. 1o)

Interpretiert man den Erwartungswert A als Wahrscheinlichkeit für die Vernichtung einer blauen Einheit durch eine rote Einheit in einer Zeiteinheit, so kann offensichtlich, bedingt durch ein großes Δt, diese Wahrscheinlichkeit einen Wert > 1 annehmen. Da aber schon ein Ereignis mit einer Wahrscheinlichkeit für sein Eintreffen von genau 1 ein mit Sicherheit eintreffendes Ereignis ist, ist ein Wachsen der A über 1 hinaus in wahr-

---

9) Vergl.zu den folgenden Ausführungen: Morse,P.M. und Kimball,G.E.: Methods of Operations Research; Cambridge/Mass., 1951, S.69

1o) Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird auf die Schreibweise $A(\Delta t)$ verzichtet und der Kampfwert einer Einheit von Rot weiterhin mit A bezeichnet; dies ist nur als Abkürzung zu verstehen.

scheinlichkeitstheoretischer Sicht unsinnig. Es folgt daraus, daß die Wahrscheinlichkeit P, daß eine Einheit von Blau von einer Einheit von Rot in der Zeitspanne Δt vernichtet wird, streng genommen nicht $A \cdot \Delta t$ $(A > 0)$ sein kann, da sonst für große Δt gelten würde $A \cdot \Delta t > 1$:

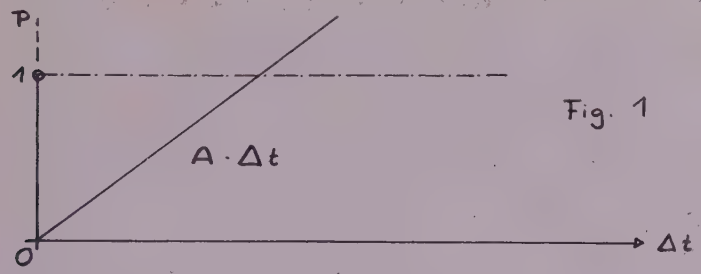

Fig. 1

Diese Beziehung kann nur für kleine Δt approximativ richtig sein.

Richtiger und allgemeiner kann man dagegen schreiben:

$$P = A(\Delta t) ,$$

eine monoton wachsende Funktion, für die gelten muß:

$$P = 0 \quad \text{für} \quad \Delta t = 0$$

und stets:

$$P \leq 1 .$$

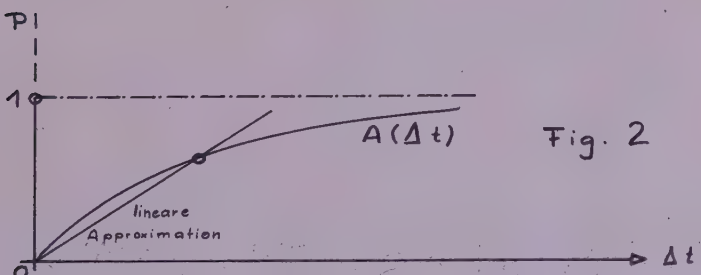

Fig. 2

Beispielsweise kann sein:

$$A(\Delta t) = 1 - e^{-c\,\Delta t} \quad \text{(Poissonprozeß)} .$$

Wenn in der Folge weiterhin mit $A = A \cdot \Delta t$ gearbeitet wird, dann aus folgenden Gründen [11]:

1. Eine sinnvolle, sich aus der Natur der Sache zwingend ergebende Begründung für die Verwendung einer bestimmten nicht-linearen Funktion zu finden, war nicht möglich.

2. Durch Verwendung linearer Funktionen konnte der Rechenaufwand in einem vertretbaren Rahmen gehalten werden.

3. Die $P = A(\Delta t)$ können als klein angenommen werden [12], wodurch der Fehler, der durch die Linearisierung der Funktion entsteht, verhältnismäßig klein bleibt, da die hier an Stelle der linearen Funktionen in Frage kommenden nicht-linearen, monoton wachsenden Funktionen innerhalb kleiner Bereiche durchaus durch lineare Funktionen näherungsweise darstellbar sind.

---

11) S. dazu: Menges, G.: Ökonometrie, Wiesbaden, 1961 S. 27

12) Engel, J.H.: A Verification ..., op.cit., S. 165, hat, auf der Basis historischer Daten über die Schlacht von Iwo Jima, die A's und B's (B ist entsprechend der Kampfwert einer blauen Einheit in einer Zeiteinheit bezüglich einer roten Einheit) für die Japaner und die Amerikaner, die sich dort im Kampf gegenüberstanden, bezogen auf ein Δt von der Länge eines Tages, berechnet und gelangt zu:

$$A = 0{,}0544 \quad \text{und} \quad B = 0{,}0106 \ .$$

Es kann daraus geschlossen werden, daß ein schon wirklich unvernünftig großes Zeitintervall als Zeiteinheit zugrunde gelegt werden muß, bevor der durch die Linearisierung bewirkte Fehler schwerwiegend ist, bevor gar im Extremfall $A > 1$ werden würde.

Da nun die Streitkraft Blau nicht nur aus einer, sondern insgesamt aus M Einheiten besteht, da außerdem jede blaue Einheit die gleiche "Chance" hat, von der roten Einheit zum Kampf ausgewählt zu werden, folgt:

$\frac{A}{M}$ = Erwartungswert für den Bruchteil der Gesamtstreitkraft Blau, der in einer Zeiteinheit von einer Einheit von Rot vernichtet wird.

Dieser Ausdruck ist dann aber auch genau die Wahrscheinlichkeit für die Vernichtung einer von M blauen Einheiten durch eine Einheit von Rot in einer Zeiteinheit, d.h. in der Zeitspanne t bis $t + \Delta t$.

Es folgt daraus:

$1 - \frac{A}{M}$ = Wahrscheinlichkeit für die Nichtvernichtung einer von M blauen Einheiten durch eine Einheit von Rot in einer Zeiteinheit.

Da die Streitkraft Rot aber in aller Regel nicht aus lediglich einer Einheit, sondern aus N Einheiten besteht, und da die Wahrscheinlichkeit, von einer bestimmten Einheit von Rot nicht vernichtet zu werden, nicht ausschließt, daß die Vernichtung von einer der anderen N - 1 roten Einheiten herbeigeführt wird, ergibt sich, nach dem Multiplikationstheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Wahrscheinlichkeit für die Nichtvernichtung einer von M blauen Einheiten durch N Einheiten von Rot in einer Zeiteinheit wie folgt:

$$q = \left(1 - \frac{A}{M}\right)^N$$

Der folgende Ausdruck gibt dann die Wahrscheinlichkeit für die Vernichtung einer von M blauen Einheiten durch N Einheiten von Rot in einer Zeiteinheit:

$$p = 1 - \left(1 - \frac{A}{M}\right)^N .$$

Die Wahrscheinlichkeiten p und q sind die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten bzw. Nichteintreten des Ereignisses: Vernichtung einer von M blauen Einheiten durch N Einheiten von Rot in einer Zeiteinheit.

Lanchester-Gleichungen = Erwartungswerte von Binomialverteilungen

Wird nun angenommen, daß die feindliche Einwirkung von Rot auf eine Einheit von Blau ein zufälliger Vorgang sei, dessen Ergebnis nur in der Vernichtung oder Nichtvernichtung dieser Einheit bestehen kann, also in einem von zwei sich ausschließenden Ereignissen, so ist, wenn die blaue Streitkraft aus M Einheiten besteht, der Kampf von N Einheiten von Rot mit diesen M Einheiten von Blau als M-fache, stochastisch unabhängige Wiederholung des zufälligen Vorganges der feindlichen Einwirkung von Rot auf eine Einheit von Blau, als M-fache Wiederholung des "Zufallsexperimentes" anzusehen.[13]

Im Verlaufe dieser M gleichartigen Vorgänge tritt das Ereignis "Vernichtung der blauen Einheit" α-mal, das Ereignis "Nichtvernichtung der blauen Einheit" $(M-\alpha)$-mal auf. Dabei kann α jeden ganzzahligen Wert zwischen 0 und M, die Grenzen eingeschlossen, annehmen.

---

13) In der hier vorliegenden Arbeit wird durchgehend die stochastische Unabhängigkeit der als Zufallsexperimente aufgefaßten Einzelkämpfe angenommen. Diese Annahme ist im höchsten Grade problematisch, scheint doch schon eine Analyse des Kampfgeschehens "mit dem gesunden Menschenverstande" auf eine mehr oder minder starke, gegenseitige Abhängigkeit der Einzelkämpfe hinzudeuten. Diese Abhängigkeit macht sich zu Beginn des Kampfes, wenn die Zahl der Einheiten auf beiden Seiten noch recht groß ist, nicht so stark bemerkbar, gewinnt aber, mit wachsender Dauer des Kampfes und besonders gegen sein Ende zu, wenn die Zahl der beteiligten Einheiten mindestens einer Seite sehr klein wird, zunehmend an Bedeutung. (Forts. s. nächste Seite)

Wenn nun die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des einzelnen Ereignisses p ist, dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb einer Zeiteinheit aus der Gesamtzahl von M insgesamt α Einheiten vernichtet werden, nach der Binomialverteilung wie folgt: [14]

$$P(M, \alpha, p) = \binom{M}{\alpha} \left[1 - (1 - \frac{A}{M})^{M}\right]^{\alpha} \left[(1 - \frac{A}{M})^{M}\right]^{M - \alpha}$$

Es ist hierbei die Binomialverteilung zugrunde zu legen, da es sich um ganzzahlige, gleichartige Ereignisse handelt, deren Anzahl endlich und beträchtlich kleiner als ∞ ist und da ferner die Reihenfolge des Eintreffens oder Nichteintreffens des Ereignisses ohne Bedeutung ist.

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich lediglich auf die Vernichtung oder Nichtvernichtung blauer Einheiten durch die rote Streitkraft. Sinngemäß läßt sich das eben Gesagte jedoch ohne weitere Schwierigkeiten übertragen auf die Einwirkung von Blau auf Rot und damit ausweiten auf die folgende Form: [15]

$$P_B(M, \alpha, p_B) = \binom{M}{\alpha} \left[1 - (1 - \frac{A}{M})^{N}\right]^{\alpha} \left[(1 - \frac{A}{M})^{N}\right]^{M - \alpha} \quad (1a)$$

$$P_R(N, \beta, p_R) = \binom{N}{\beta} \left[1 - (1 - \frac{B}{N})^{M}\right]^{\beta} \left[(1 - \frac{B}{N})^{M}\right]^{N - \beta} \quad (1b)$$

dabei ist: p_B = Wahrscheinlichkeit für die Vernichtung einer von M blauen Einheiten durch N Einheiten von Rot in einer Zeiteinheit

p_R = Wahrscheinlichkeit für die Vernichtung einer von N roten Einheiten durch M Einheiten von Blau in einer Zeiteinheit

β = Zahl der innerhalb einer Zeiteinheit aus der Gesamtzahl von N vernichteten Einheiten

---

Die Annahme gilt also, mit einigem Anspruch auf Richtigkeit, approximativ nur für kleine t. Wenn dennoch stochastische Unabhängigkeit auch dann angenommen wird, wenn sie der Realität vermutlich nicht mehr adäquat ist, dann vor allem deswegen, weil sich so der Rechenaufwand stark verminderte. (S. dazu Menges, G.: Ökonometrie, op.cit. S.63ff)

14) Die statistisch-methodischen Grundlagen wurden entnommen: Heinhold, J. u. Gaede, K.-W.: Ingenieurstatistik; München, Wien, 1964

15) Gl. (1a) bis (6) sind im wesentlichen in Morse, P.M. und Kimball, G.E., op.cit., S.69 enthalten.

Für die Erwartungswerte dieser Verteilung, für die durchschnittliche Zahl blauer und roter Einheiten also, die während einer Zeiteinheit vernichtet werden, ergeben sich dann die folgenden Gleichungen:

$$E(\alpha) = \overline{\alpha} = M\left[1 - (1 - \frac{A}{M})^N\right] \qquad (2a)$$

$$E(\beta) = \overline{\beta} = N\left[1 - (1 - \frac{B}{N})^M\right] \qquad (2b)$$

und entsprechend die Ausdrücke für die Streuung:

$$\sigma_\alpha = \sqrt{M\left[1 - (1 - \frac{A}{M})^N\right](1 - \frac{A}{M})^N} \qquad (3a)$$

$$\sigma_\beta = \sqrt{N\left[1 - (1 - \frac{B}{N})^M\right](1 - \frac{B}{N})^M} \qquad (3b)$$

Wie offensichtlich aus dem Binom $(1 - \frac{A}{M})^N$ bzw. $(1 - \frac{B}{N})^M$ folgt, müssen die Erwartungswerte und die Streuungen in den Gl. (2) und (3) nicht ganzzahlig sein. Dies steht nur scheinbar im Widerspruch zu der oben aufgestellten Behauptung (S. 8 unten) der Ganzzahligkeit von α: während die beobachteten Werte, die Zufallsgrößen (α), aus der Natur der Sache heraus, ganzzahlig sein müssen, brauchen die Erwartungswerte diese Forderung nicht zu erfüllen.

Ist nun $\overline{\alpha}$ die Zahl der Einheiten, die im Durchschnitt in einer Zeiteinheit aus M blauen Einheiten von N roten Einheiten vernichtet werden, und ist die blaue Streitkraft im Zeitpunkt t M(t) Einheiten stark, nach Ablauf einer Zeiteinheit aber M(t+1), wobei M(t) > M(t+1), dann gilt:

$$\overline{\alpha} = E\left[M(t+1) - M(t)\right] = M(t)\left[1 - (1 - \frac{A}{M(t)})^{N(t)}\right] \qquad (4)$$

Da hierbei die Veränderung der Stärke von Blau (ΔM) nach Ablauf von jeweils einer Zeiteinheit betrachtet wird (= Δt), da ferner das A auf die gleiche Zeiteinheit bezogen ist, da also $\Delta t = (t+1) - t$ verwendet wird, erscheint in Gl. (4) anstelle von $A \Delta t$ nur A.

Betrachtet man jedoch die Stärke von Blau zu einem beliebigen Zeitpunkt, geht man also über von der diskreten zur kontinuierlichen Betrachtungsweise und will dann wissen, wie groß die Veränderung der Stärke von Blau nach Ablauf eines, streng genommen, unendlich kleinen Zeitabschnittes dt ist, so erhält man die folgende, stetig differenzierbare Funktion, die an den genau definierten Punkten dieselben Werte ergibt wie Gl.(4):

$$E\left[M(t+dt) - M(t)\right] = M(t)\left[1 - \left(1 - \frac{A\,dt}{M(t)}\right)^{N(t)}\right] \quad (5)$$

Es versteht sich, daß bei dieser kontinuierlichen Betrachtungsweise die Forderung nach Ganzzahligkeit nicht aufrecht erhalten werden kann.

Es gelte nun (Definition):

$$E\left[M(t+dt) - M(t)\right] = -\overline{dM(t)}$$

Ersetzt man die linke Seite von Gl.(5) durch diesen Ausdruck und dividiert beide Seiten durch dt, so erhält man:

$$-\frac{\overline{dM(t)}}{dt} = \frac{M(t)}{dt}\left[1 - \left(1 - \frac{A\,dt}{M(t)}\right)^{N(t)}\right] \quad (6)$$

Der Ausdruck:

$$\left(1 - \frac{A\,dt}{M(t)}\right)^{N(t)}$$

ist ein Binom, welches sich unter Benutzung der Taylor'schen Formel transformieren läßt in:

$$f(o) = \left(1 - \frac{A\,dt}{M(t)}\right)^{M(t)}$$

$$= 1 + \frac{dt}{1!} M(t) \left(1 - \frac{A\,dt}{M(t)}\right)^{M(t)-1} \left(-\frac{A}{M(t)}\right)$$

$$+ \frac{dt^2}{2!} f''(o) + \frac{dt^3}{3!} f'''(o) + \cdots$$

Eingesetzt in Gl.(6) ergibt das:

$$-\frac{dM(t)}{dt} = \frac{M(t)}{dt}\left[-\frac{dt}{1!} M(t) \left(-\frac{A}{M(t)}\right) \left(1 - \frac{A\,dt}{M(t)}\right)^{N(t)-1}\right.$$

$$\left. - \frac{dt^2}{2!} f''(o) - \cdots\right]$$

$$= M(t)\left[-N(t) \left(-\frac{A}{M(t)}\right) \left(1 - \frac{A\,dt}{M(t)}\right)^{M(t)-1}\right.$$

$$\left. - \frac{dt}{2!} f'''(o) - \cdots\right] \qquad (7)$$

Führt man den Grenzübergang durch: $dt \to 0$, so folgt daraus:

$$-\frac{dM(t)}{dt} = M(t)\left[-N(t)\left(-\frac{A}{M(t)}\right)\right] = AN(t)$$

oder:

$$\frac{d\,M(t)}{dt} = -A\,N(t) \qquad (8a)$$

und entsprechend:

$$\frac{d\,N(t)}{dt} = -B\,M(t) \qquad (8b)$$

Völlig gleichlautende Gleichungen sind erstmals im Jahre 1916 von dem englischen Aerodynamiker und Maschinenbauingenieur F.W.Lanchester (1868-1946) aufgestellt worden.[16] Diese sogenannten "Lanchester-Gleichungen" wurden später die Grundlage für zahlreiche Arbeiten auf dem Gebiet der Beschreibung von Kampfgeschehen.[17] Sie werden heute allgemein als der Anfangspunkt der gesamten Entwicklung der militärischen Operations Research angesehen.[18]

---

16) Lanchester,F.W., Aircraft in Warfare; London,1916; insbes.Kapitel 5 u.6. Biographisches über Lanchester findet sich bei: Mc Closkey,J.F.: Of Horseless Carriages, Flying Machines, and Operations Research: A Tribute to Frederick William Lanchester (1868-1946); O.R.,vol.4, 1956, S.141 ff.

17) In besonders enger Anlehnung an die Arbeit von Lanchester sind die folgenden Artikel geschrieben:
Engel,J.H., A Verification ...., op.cit.
Weiss,H.K.: Lanchester-Type Models of Warfare; Proceedings of the First International Conference on Operational Research, 1957, S.82 ff.
Bach,R.E.jr., Dolansky,L.u.Stubbs,H.L.: op.cit.
Deitchman,S.J.: A Lanchester Model of Guerilla Warfare; OR,vol.1o, 1962, S.818 ff.
Dolansky,Ladislav: Present State of the Lanchester Theory of Combat; OR,vol.12, 1964, S.344 ff.
Weiss,H.K.: Combat Models and Historical Data: The U.S.Civil War; OR,vol.14, 1966, S.759 ff.
Weitere Literatur ist dem Literaturverzeichnis zu entnehmen.

Gl.(8) stellen ein System simultaner Differentialgleichungen dar, welches für jeden beliebigen Zeitpunkt des Kampfes die Erwartungswerte für die Stärken von Rot und Blau liefern.

Ihre geschlossene Lösung ergibt für N(t) und M(t) die folgenden Funktionen: [19]

$$\overline{N(t)} = N(0) \cos h\sqrt{AB}\, t - \sqrt{\frac{A}{B}}\, M(0) \sin h\sqrt{AB}\, t \qquad (9a)$$

$$\overline{M(t)} = M(0) \cos h\sqrt{AB}\, t - \sqrt{\frac{B}{A}}\, N(0) \sin h\sqrt{AB}\, t \qquad (9b)$$

$\overline{N(t)}$ und $\overline{M(t)}$ in Gl.(9) sind Mittelwerte, mithin die Erwartungswerte der der Rechnung zugrunde liegenden Binomialverteilung.

Da der Erwartungswert der Binomialverteilung für N zu einem bestimmten Zeitpunkt t sich wie folgt ergibt:

$$\overline{N(t)} = N(0)\, q_B(t) \,, \quad \text{wobei } q_B(t) = \text{Wahrscheinlichkeit für die Nichtvernichtung einer von M blauen Einheiten durch N Einheiten von Rot bis zum Zeitpunkt t} \qquad (10)$$

muß gelten:

$$q_B(t) = \cos h\sqrt{AB}\, t - \sqrt{\frac{A}{B}}\, \frac{N(0)}{M(0)} \sin h\sqrt{AB}\, t \qquad (11)$$

---

18) Weiss, H.K.: The Fiske-Model of Warfare; OR,Vol.10, 1962, S. 569ff, hat darauf hingewiesen, daß der amerikanische Konteradmiral Bradley A. Fiske schon 1905, also 11 Jahr vor Lanchester, in einem Aufsatz über "American Naval Policy" das Kampfgeschehen entsprechend dem "Quadratischen Gesetz" von Lanchester beschrieben, wenn auch nicht mathematisch formuliert haben soll. Vgl.dazu auch: Engel,J.H.: Comments on a Paper by H.K.Weiss; OR,vol.11,1963, S. 137ff.

19) Lösung wird vorgeführt im Anhang 3.1. (S. 144ff)

Unter Verwendung von Gl.(10) und Gl.(11) erhält man die folgende Form:

$$\overline{M(t)} = M(0)\left[\cosh\sqrt{AB}\,t - \sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{N(0)}{M(0)}\sinh\sqrt{AB}\,t\right] \quad (12a)$$

und:

$$\overline{N(t)} = N(0)\left[\cosh\sqrt{AB}\,t - \sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{M(0)}{N(0)}\sinh\sqrt{AB}\,t\right] \quad (12b)$$

Für die Streuung ergeben sich dann die folgenden Ausdrücke:

$$\sigma^2_{M(t)} = M(0)\left[\cosh\sqrt{AB}\,t - \sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{N(0)}{M(0)}\sinh\sqrt{AB}\,t\right] \quad (13a)$$

$$\left\{1 - \left[\cosh\sqrt{AB}\,t - \sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{N(0)}{M(0)}\sinh\sqrt{AB}\,t\right]\right\}$$

$$\sigma^2_{N(t)} = N(0)\left[\cosh\sqrt{AB}\,t - \sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{M(0)}{N(0)}\sinh\sqrt{AB}\,t\right] \quad (13b)$$

$$\left\{1 - \left[\cosh\sqrt{AB}\,t - \sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{M(0)}{N(0)}\sinh\sqrt{AB}\,t\right]\right\}$$

Die Gleichungen gelten nur für den Bereich
$M(t) \leq M(0)$ und $N(t) \leq N(0)$, sowie $M(t) \geq 0$ oder $N(t) \geq 0$.

1.1.4. Aussagekraft der Erwartungswerte

Aus den Erwartungswerten und den Streuungen lassen sich unschwer die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung errechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, daß, bei einer Überlebenswahrscheinlichkeit einer blauen Einheit zum Zeitpunkt t von $q_B(t)$, von M(0) blauen Einheiten zum Zeitpunkt t insgesamt α' Einheiten überleben, ist:

$$P_B(\, M(0),\, \alpha';\, t;\, q_B(t)\,) = \binom{M(0)}{\alpha'} q_B(t)^{\alpha'} \left[1 - q_B(t)\right]^{M(0) - \alpha'} \qquad (14a)$$

und entsprechend:

$$P_R(\, N(0),\, \beta';\, t;\, q_R(t)\,) = \binom{N(0)}{\beta'} q_R(t)^{\beta'} \left[1 - q_R(t)\right]^{N(0) - \beta'} \qquad (14b)$$

Dabei ist dann:

$$q_B(t) = \cos h\sqrt{AB}\, t - \sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{N(0)}{M(0)}\, \sin h\sqrt{AB}\, t \qquad (15a)$$

und:

$$q_R(t) = \cos h\sqrt{AB}\, t - \sqrt{\frac{B}{A}}\,\frac{M(0)}{N(0)}\, \sin h\sqrt{AB}\, t \qquad (15b)$$

Durch Auflösen von Gl.(8a) und (8b) nach dt und Gleichsetzen mit anschließender Integration erhält man: [20]

$$B\left[M(0)^2 - \overline{M(t)^2}\right] = A\left[N(0)^2 - \overline{N(t)^2}\right]. \qquad (16)$$

Da die Auseinandersetzung zwischen Blau und Rot dann als beendet anzusehen ist, wenn entweder Blau oder Rot über

---

20) S. Anhang 1

keine einsatzfähige Einheit mehr verfügt, also völlig vernichtet ist, muß für den Zeitpunkt t_1, den Zeitpunkt des Endes der Auseinandersetzung gelten:

$$L(t_1) = 0$$

oder

$$L(X) = 0$$

Es werden hier jedoch keine Zufallsgrößen beobachtet, sondern Erwartungswerte berechnet. Die Aussage, die aus dem Vorangegangenen hergeleitet werden kann, ist also lediglich eine über den zu erwartenden Zeitpunkt des Kampfendes $\overline{X}$; für diesen Zeitpunkt muß dann gelten:

$$\overline{L(X)} = 0$$

oder

$$\overline{N(X)} = 0 \ .$$

Wird nun z.B. $\overline{N(X)} = 0$ in Gl. (16) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\overline{M(X)} = \sqrt{M(0)^2 - \frac{A}{B} N(0)^2} \qquad (17)$$

Daraus folgt als Bedingung

für einen Sieg von Blau: $M(0)^2 > \frac{A}{B} N(0)^2$

für einen Sieg von Rot : $M(0)^2 < \frac{A}{B} N(0)^2$

für einen unentschiedenen Ausgang:

$$M(0)^2 = \frac{A}{B} N(0)^2 \ .$$

Der erwartete Zeitpunkt für den Abschluß der Kampfhandlungen, $t = \bar{X}$, läßt sich dann durch Einsetzen von Gl.(17) in Gl.(9) und Auflösen von Gl.(9) nach t bestimmen: 21)

$$\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \ln \sqrt{\frac{M(0)\sqrt{B} + N(0)\sqrt{A}}{M(0)\sqrt{B} - N(0)\sqrt{A}}} \qquad (18)$$

Mit der Kenntnis des Erwartungswertes für die Anzahl der nach Abschluß der Aktionen noch überlebenden Einheiten und mit der Kenntnis des zu erwartenden Zeitpunktes für den Abschluß der Aktionen, läßt sich die Wahrscheinlichkeit ermitteln, mit welcher nach Abschluß der Kampfhandlungen noch mindestens α' Einheiten einsatzfähig sind.

Ist die Wahrscheinlichkeit, daß von M(0) blauen Einheiten zum Zeitpunkt $\bar{X}$, an welchem $\overline{N(t)} = 0$, genau α' überleben:

$$P_B(M(0), \alpha'; \bar{X}; q_B(\bar{X})) = \binom{M(0)}{\alpha'} q_B(\bar{X})^{\alpha'} [1 - q_B(\bar{X})]^{M(0) - \alpha'} \qquad (19)$$

wobei:

$$q_B(\bar{X}) = \cos h\sqrt{AB}\,\bar{X} - \sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{N(0)}{M(0)} \sin h\sqrt{AB}\,\bar{X} \qquad (20)$$

so ist die Wahrscheinlichkeit, daß insgesamt α' oder mehr Einheiten den Kampf überleben, dann:

---

21) S. Anhang 2

$$P_B(\, M(0),\ M;\ \bar{X};\ q_B(\bar{X})\,) = \sum_{M=\alpha'}^{M(0)} \binom{M(0)}{M} q_B(\bar{X})^M \left[1 - q_B(\bar{X})\right]^{M(0)\,-\,M} \qquad (21)$$

wobei gilt:

$$\alpha' \leq M \leq M(0)$$

und M nur ganzzahlige Werte annehmen kann.

Ein Fall hat in der Realität besondere Bedeutung: die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit die verbleibende Truppe eine Stärke hat, die mindestens gleich dem erwarteten Wert ist.

Um dem Sicherheitsbedürfnis bei der Planung Rechnung zu tragen, muß hierbei berücksichtigt werden, daß der Erwartungswert einer von M(0) möglichen Werten ist.

Wenn man aber von einem Wert $\overline{M(X)} - 3\sigma$ ausgeht, dann wird der realisierte Wert mit einer sehr großen, i.d.R. über 99% liegenden Wahrscheinlichkeit im Bereich zwischen $\overline{M(X)} - 3\sigma$ und M(0) liegen.

Dieses Ergebnis kann man auch auf einfacherem Wege erreichen:

Als Faustregel kann angenommen werden, daß, wenn:

$$\overline{M(X)}\ q_B(\bar{X}) > 4$$

und

$$\overline{M(X)}\ \left[1 - q_B(\bar{X})\right] > 4\ ,$$

die Normalverteilung die Binomialverteilung als Näherung ersetzen kann. [22]

---

22) So Heinhold, J. und Gaede, K.-W., op.cit., S.159f

Diese beiden Bedingungen werden bei dem hier betrachteten Gegenstand i.d.R. erfüllt, so daß, bei Anwendung der 3-σ-Regel, mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,87% der realisierte Wert größer oder gleich $\overline{M(X)} - 3\sigma$ sein wird.

1.2. Analyse der Kampfwerte

1.2.1. Grundsätzliche Ueberlegungen und Prämissen

Ist A der Erwartungswert für den Bruchteil einer Einheit von Blau, der in einer Zeiteinheit von einer Einheit von Rot vernichtet wird, so ist in A ein Ausdruck für die Kampfkraft einer roten Einheit, bezogen auf die blaue Streitkraft, gegeben.

Sollen die das Kampfgeschehen beschreibenden Gleichungen zum Zwecke der Analyse des Verlaufs vergangener oder gar der Prognose des Verlaufs zukünftiger Kämpfe Verwendung finden, werden sie diese Aufgabe umso besser erfüllen können, je genauer die Kampfwerte bestimmt werden können. Das bedeutet aber, daß es notwendig ist, die Größen, die das Kampfgeschehen beeinflussen oder beeinflussen können, so genau wie möglich zu analysieren. Das bedeutet insbesondere, sich darüber Klarheit zu verschaffen, welche dieser Größen in die Kampfwerte A und B eingehen und wie diese Einflußnahme erfolgt. Es ist anzustreben, die Analyse der A und B so weit zu treiben, daß die nicht berücksichtigten einflußnehmenden Größen den Ausgang des Kampfgeschehens nicht mehr wesentlich beeinflussen können. Es folgt daraus, daß es, soweit irgend möglich, vermieden werden muß, sich bei der numerischen Bestimmung der Kampfwerte auf die Urteile militärischer Fachleute oder auf sonstige, aus der Vergangenheit übernommene oder intuitive Werte abzustützen.

Das erscheint insbesondere auch deswegen notwendig, weil derartige Urteile zu stark im Denken in der Vergangenheit verhaftet sind und somit leicht die Bedeutung von grundsätzlich Neuem nicht erkennen oder zumindest unterschätzen.

Der Kampfwert einer Einheit von Rot, die Fähigkeit also, in einer Zeiteinheit einen bestimmten Bruchteil einer blauen Einheit zu vernichten, hängt ab von:

- der Vernichtungswahrscheinlichkeit bei der Durchführung einer gezielten Kampfaktion gegen eine Einheit von Blau,
- der Anzahl der gezielten Kampfaktionen, die in einer Zeiteinheit durchgeführt werden können.

Ist:

p_N = die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer gezielten Kampfaktion einer roten Einheit eine Einheit von Blau vernichtet wird,

r_N = die Beschußrate, d.h.die Anzahl von gezielten Kampfaktionen einer Einheit von Rot gegen blaue Einheiten in einer Zeiteinheit,

so ist:

$$A = p_N r_N \quad ^{23)} \qquad (22)$$

Trefferwahrscheinlichkeit

Zunächst soll die Vernichtungswahrscheinlichkeit p_N bzw. p_M untersucht werden.

Es wird angenommen, daß:

1. die Einheiten ihre gezielten Kampfaktionen mit Schußwaffen durchführen,
2. die Vernichtung einer Einheit nur durch das Einschlagen eines Geschosses im Ziel (Aufschlagsgeschoß) erreicht wird,
3. zur Vernichtung des Ziels ein Treffer ausreicht,

---

23) Dathe, H.M.: Einführung in die Theorie der strategischen Duelle; Ottobrunn, 1966, JABG - ORG/MS - 8 S.6f.

4. das Ziel, nachdem es erkannt und anvisiert worden ist, sich nicht mehr bewegt.

Die Annahme 1.ist durchaus realistisch, wenn auch damit eine ganze Reihe von Waffen unberücksichtigt bleibt, wie Primitivwaffen (Fallen, Stichwaffen etc.), aber auch psychologische Waffen.[24] Nicht berücksichtigt wurden ferner durch diese Annahmen Waffen, die nicht zu den ballistischen zählen, auf die also auch noch nach dem Abfeuern ein Einfluß ausgeübt werden kann. Da aber diesen Waffen im Erdkampf auf mittlerer Führungsebene nach dem gegenwärtigen Stand der Rüstungstechnik nur im Bereich der Panzerabwehr eine größere Bedeutung zukommt, kann diese Annahme, ohne große Einbuße an Realitätsadäquanz aufrecht erhalten werden.

Die Annahme 2.ist demgegenüber wesentlich restriktiverer Natur. Sie bedeutet, daß Geschosse, deren Wirkung eine räumliche ist (Distanzgeschoß), die also einen Wirkungsbereich haben, der über den Treffpunkt hinausgeht, nicht berücksichtigt werden,[25] sie bedeutet mithin auch, daß sich die Analyse nur auf die konventionelle, d.h.nichtatomare Kriegführung bezieht.

---

24) Wenn durch psychologische Kampfführung die Zahl der Überläufer erhöht wird, erhöht sich damit die Zahl der vernichteten Gegner. Derartige "Waffen" zu untersuchen und in ihrer quantitativen Bedeutung zu beurteilen, ist das hier vorgestellte Modell außerstande.

25) Dieses Problem ist in der Literatur eingehend behandelt worden, u.a.
Hare,R.R.jr.: A Mathematical Model of Terrain Shielding, OR,vol.6,1958, S.53o ff.
Lilliefors,H.W.: A Hand-Computation Determination of Kill Probability for Weapons Having Spherical Lethal Volume;OR,vol.5,1957, S.416 ff.
McNolty,F.: Kill Probability for Multiple Shots; OR, vol.15, 1967, S.165 ff
McNolty,F.: Kill Probability when the Lethal Effect is Variable;OR,vol.13,1965, S.478 ff.
McNolty,F.: Kill Probability when the Weapon Bias is Randomly Distributed;OR,vol.1o,1962, S.693 ff.
Weidlinger,P.:The Lethal Radius of a Salvo; OR,vol.1o, 1962, S.547 ff.
Wentzel, J.: op.cit., S.86 ff.

Die Annahme 3.berücksichtigt nicht, daß durch einen Treffer eine gegnerische Einheit nur teilweise oder überhaupt nicht in ihrer Funktionsweise beeinträchtigt wird. Die Annahme erscheint im Landkampf, besonders dort, wo es sich um den Kampf von Infanteristen gegen Infanteristen handelt, vertretbar.[26] [27]

Annahme 4.ist im Erdkampf, wo in erster Linie Waffen mit großer Rasanz verwendet werden, den tatsächlichen Verhältnissen angemessen. Ausnahme bildet auch hier wieder die Panzerabwehr mit ihren langsam fliegenden Panzernahbekämpfungswaffen, die ein Ausweichen des anvisierten Zieles durchaus erlauben [28]

Unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen können für die Bestimmung der Vernichtungswahrscheinlichkeiten die Erkenntnisse und Methoden der militärischen Schießlehre, der Ballistik, herangezogen werden [29].

---

26) Bonder,S.: The Lanchester Attrition-Rate Coefficient; OR, vol.15, 1967, S.221 ff. beschreibt die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ziel mit z Treffern zerstört wird durch die geometrische Verteilung:
$p(z) = [1-P\ (k\ /\ H)]^{z-1}\ P\ (k\ /\ H)$, wobei:
P (k / H) bedingte Vernichtungswahrscheinlichkeit eines Schusses unter der Voraussetzung, daß es ein Treffer ist.

27) Es folgt aus dem eben Gesagten, daß hier auch nicht der kumulative Effekt mehrerer Treffer, von denen einer nicht zur Vernichtung ausreicht, untersucht wird. Vgl.zu diesem Problem: Weidlinger, op.cit., Wentzel, op.cit.

28) Zur Berücksichtigung der Bewegungen der Ziele s. Laurent,A.G.: Bombing Problems - A Statistical Approach; OR,vol.5, 1957, S.75 ff. und
Laurent,A.G.: Bombing Problems - A Statistical Approach II; OR,vol.1o, 1962, S.38o ff.

29) s.Wentzel, op.cit., S.13 und für die folgenden Ausführungen: S.51 ff und S.87 ff. und
Walsh,J.E.: Approximate Salvo Kill Probahilities for Small and Medium Sixed Targets when Cumulative Damage is unimportant;OR,vol.3,1955, S.69 ff.

Richtet im Erdkampf eine Einheit von Rot ihre Waffe auf ein Ziel, auf eine Einheit von Blau also, so wird der Schuß nicht mit Sicherheit im Ziel einschlagen, vorausgesetzt, die Schießbedingungen sind die normalerweise auftretenden, also z.B. Schießen mit einem Maschinengewehr auf ein in 500m Entfernung vorbeifahrendes Kfz, nicht aber z.B. Schießen aus 1om Entfernung auf eine 2om x 2om Häuserfront mit einer gerichteten Kampfwagenkanone.

Beim Bekämpfen von militärischen Zielen mit Infanterie- oder Panzerwaffen wird aus der dem Zielenden zugewandten Seite des Zieles von diesem ein Punkt ausgewählt, den er anvisiert (Zielpunkt).

Das Ziel wird auf die Kartenebene projiziert, im Erdkampf also auf die Erdoberfläche. Die Projektion erfolgt in Richtung des Schießens. Die Projektion des Zielpunktes wird dann zum Ursprung eines Koordinatensystems, dessen Ordinate durch die verlängerte Visierlinie, dessen Abszisse durch das Lot auf die Visierlinie im projizierten Zielpunkt gegeben ist [30].

Nach Abgabe einer größeren Anzahl von Schüssen unter gleichen Bedingungen werden deren Treffpunkte um einen Punkt im Koordinatensystem mit den Koordinaten $\overline{x}$ und $\overline{y}$ streuen. Dabei nimmt die Dichte der Treffer mit zunehmender Entfernung vom Treffer-Mittelpunkt ab.

Die Abweichung des Treffpunktes vom Treffermittelpunkt wird als zufälliger Fehler, die des Treffer-Mittelpunktes vom Zielpunkt, vom Ursprung des Koordinatensystems also, als systematischer Fehler bezeichnet. [31]

---

30) Der Wahl der Achsen haftet zunächst etwas Willkürliches an. Sie ist aber in dieser Weise üblich und durch die Eigenschaften von Waffe und Geschoß zu begründen. S. Oerlikon-Taschenbuch; Zürich-Oerlikon 1956, S.184

31) Bei einer einwandfrei justierten Waffe wird dieser systematische Fehler gleich Null sein; die Schießlehre geht in aller Regel von derartigen Waffen aus.

Beide zusammen, systematischer und zufälliger Fehler, ergeben die Gesamtstreuung der Einschläge.

In der Schießlehre ist es üblich, für die Verteilung der Einschläge um den mittleren Treffpunkt die Normalverteilung anzunehmen. Als Begründung für diese Annahme wird angeführt, daß der Zufallsfehler "als Summe einer sehr großen Anzahl einzelner, durch einzelne elementare Ursachen bewirkter Fehler betrachtet werden kann" 32).

Die der Gesamtstreuung zugrunde liegende Gesetzmäßigkeit hat dann die folgende Form:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]} \qquad (23)$$

wobei:

$\bar{x}, \bar{y}$ = Koordinaten des Streuungszentrums

σ_x^2, σ_y^2 = mittlere quadratische Abweichung bezüglich der Achsen x und y.

Dieses Streuungsgesetz kann nur dann keine Anwendung finden, wenn die Achsen des Koordinatensystems wesentlich von den Hauptstreuungsachsen abweichen.

Hat nun die Projektion des Zieles auf die Kartenebene eine gewisse Fläche Z, so ist p_N die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Punkt des Einschlags des Geschosses in Z befindet. Hat das Streuungsgesetz die Form $\varphi(x,y)$, so gilt: 33)

$$p_N = \iint_{(Z)} \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{(Z)} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]} \qquad (24)$$

Fußnote 33) nächste S.

32) Wentzel, op.cit., S.52

Die Streuung der ballistischen Geschosse, die Abweichung der Treffpunkte vom Treffermittelpunkt, hat als Ursache verschiedene Gründe; diese sind im wesentlichen die folgenden: [34]

- ungleichmäßige Ladung,
- Lage des Geschoßschwerpunktes außerhalb der Rotationsachse,
- Bocken oder Schlagen der Waffe bei Abgabe des Schusses,
- Verkanten der Waffe bei Abgabe des Schusses,
- Erwärmung und dadurch Verziehen des Rohres der Waffe bei Abgabe mehrerer Schüsse in kurzer zeitlicher Aufeinanderfolge,
- von Schuß zu Schuß verschiedene Witterungsbedingungen

Bis auf den letzten Punkt treten diese Störungen auf bei Abgabe des Schusses.

Die Bedeutung des letzten Punktes (Witterungsbedingungen) als Ursache für die Streuung insgesamt, kann i.d.R. als gering angenommen und deswegen hier vernachlässigt werden.

---

33) Hier wurde nur der allgemeinste Fall dargestellt. Es sei jedoch verwiesen auf Bemühungen verschiedener Autoren, die Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeit durch Umgehen des Doppelintegrals (Groves,A.D. u.Smith,E.S.: Salvo Hit Probabilities for Offset Circular Targets; OR,vol.5,1957,S.222 ff.) oder durch Annahmen über die Gestalt des Zieles (Wetzel, op.cit., Lilliefors,op.cit.) zu vereinfachen.
Vgl.auch Edmundson,H.P.: The Distribution of Radial Error and its Statistical Application in War Gaming; OR, vol9, 1961, S.8 ff, und, über den Rahmen des hier Vorgetragenen hinausgehend: Grubbs, F.E.: Approximate Circular and Noncircular Offset Probabities of Hitting; OR,vol.12, 1964, S.51 ff.

34) Vgl.dazu: Molitz,H. u.Strobel,R.: Äußere Ballistik; Berlin-Heidelberg, 1963, S.3o3 ff.

Dann kann der Weg des Geschosses als annähernd determiniert gelten in dem Augenblick, in welchem das Geschoß das Rohr verläßt. Das bedeutet, daß die Größe der Standardabweichung in linearer Abhängigkeit von der Entfernung, die das Geschoß zurücklegt, gesehen werden kann:

$$\sigma_x = c_1 \cdot D$$

$$\sigma_y = c_2 \cdot D$$

wobei:

c_1 , c_2 = Konstanten, die sich aus Konstruktion und Beschaffenheit der Waffe ergeben

D = Schußweite (Entfernung: Abschußpunkt - Treffpunkt).

Daraus folgt, bei Gültigkeit von Gl.(24), daß die Trefferwahrscheinlichkeit von der Schußweite in der Form einer monoton abklingenden e-Funktion abhängt [35].

Um aber zu vermeiden, daß die Trefferwahrscheinlichkeit als Funktion der Entfernung zum Ziel in die Rechnung eingeht und damit den Rechenaufwand und die erforderliche Informationsmenge beträchtlich erhöht, kann mit einer durchschnittlich zu erwarteten Entfernung gearbeitet werden.

Diese Größe kann durch statistische Auswertung des Geländes unter Berücksichtigung der wirksamen Schußentfernung der eingesetzten Waffen ermittelt werden [36].

Der Vorzug, für die Trefferwahrscheinlichkeit einen festen, vorgegebenen Ausdruck zu haben, wird allerdings damit erkauft, daß die Trefferwahrscheinlichkeiten nunmehr Durchschnittswerte sind, die einem Einzelfall im Zweifel nicht gerecht werden.

---

35) Vgl.dazu: Dubins,L.E. u.Morgenthaler,G.W.:Inclusion of Detection in Probability of Survival Models;OR,vol.9, 1961, S.782 ff.

36) Vgl.dazu: Lützow,J.: Statistische Erfassung des Geländes unter taktischen Gesichtspunkten; Wehrtechnische Monatshefte,vol.64,1967, S.3o1 ff.
derselbe: Anwendungsbereiche und Grenzen von Operations Research für die Landesverteidigung; Dortmund 1963; Heft 67, Arbeitsgemeinschaft für Rationalisierung des Landes Nordrhein-Westfalen., S.25 ff.

1.2.3. Beschußrate

Der Kampfkraftparameter A wurde in Gl.(22) definiert. Durch Gl.(24) ist eine der beiden, die Kampfkraft beeinflussenden Größen, p_N, erklärt.

A ist aber nur dann erklärt, wenn auch r_N analysiert worden ist [37].

Ist r_N die Beschußrate, so ist der Reziprokwert von r_N , T_N , der Ausdruck für den Bruchteil einer Zeiteinheit, dessen es zur Durchführung einer gezielten Kampfaktion einer Einheit von Rot gegen blaue Einheiten bedarf:

$$\frac{1}{r_N} = T_N \cdot \qquad (25)$$

Um eine gezielte Kampfaktion gegen eine gegnerische Einheit durchführen zu können, muß die betrachtete Einheit zwei Dinge durchführen:

- sie muß eine gegnerische Einheit suchen und finden (Aufklärung) und
- sie muß das erkannte Ziel bekämpfen (Kampf im engeren Sinne).

Beide Handlungen erfordern Zeit. Die für beide Handlungen zusammen erforderliche Zeit ist gleich der Zeit der Durchführung einer gezielten Kampfaktion:

$$T_N = T_{NA} + T_{NK} \qquad (26)$$

wobei:

T_{NA} = Zeit für Aufklärung

T_{NK} = Zeit für Kampf i.e.S.

---

37) Zu den folgenden Ausführungen, insbesondere zu Gl.(25) bis (30) , vergl.Brackney,H.: The Dynamics of Military Combat; OR,vol.7, 1959, S.3o ff.

Wenn die bekämpfenden blauen Einheiten in gut versteckten Stellungen liegen und diese Stellungen nicht durch unvorsichtiges oder unkluges Verhalten verraten, dann ist für die roten Einheiten die Aufklärung gegen diesen Gegner mühsam und langwierig. Der Zeitbedarf für die Durchführung einer gezielten Kampfaktion wird groß sein; dabei wird der Zeitbedarf für die Aufklärung wesentlich größer sein, als der für die Durchführung des Kampfes i.e.S., so daß gilt:

$$T_{NA} \gg T_{NK} \quad . \tag{27}$$

Greifen jedoch die zu bekämpfenden blauen Einheiten an, so ist es für die roten Einheiten einfach, demzufolge auch mit geringerem Zeitaufwand verbunden, die einzelnen gegnerischen Einheiten auszumachen und dann zu bekämpfen. In diesem Falle wird der Zeitbedarf insgesamt geringer sein; dabei wird der Zeitbedarf für die Aufklärung wesentlich geringer sein als der für die Durchführung des Kampfes i.e.S., so daß gilt:

$$T_{NA} \ll T_{NK} \quad , \tag{28}$$

Wenn unterstellt wird, daß eine der beiden Teilzeiten wesentlich größer als die andere, so kann, als Näherung, bei der weiteren Untersuchung die wesentlich kleinere Teilzeit vernachlässigt werden.

Für A ergibt sich also bisher

wenn Blau verteidigt:

$$A = p_N \frac{1}{T_{NA}} \quad , \tag{29}$$

wenn Blau angreift:

$$A = p_N \frac{1}{T_{NK}} \quad . \tag{30}$$

Gilt Gl.(30), greift also Blau so an, daß der rote Verteidiger keine oder nahezu keine Zeit benötigt, um den Angreifer aufzuklären, so hängt r_N in keiner Weise von Blau ab, wird weder beeinflußt von der Anzahl M, noch vom Ausbildungsstand, der Ausrüstung, der Kampfmoral etc. der blauen Einheiten. Nur bei Vorliegen besonderer, selten zu erwartender Verhält-

nisse, z.B. wenn die Zahl der Angreifer so gering, ihr Deckungsbewußtsein so ausgeprägt ist, daß sie sich auch bei einem Sturmangriff zumindest zeitweise der Sicht des Verteidigers zu entziehen wissen, wird der Zeitbedarf für die Aufklärung so ansteigen, T_{NA} so groß werden, daß diese Größe selbst in einer Näherung nicht vernachlässigt werden darf. In aller Regel jedoch muß der Angreifer sich des Schutzes der Deckung begeben und enthebt damit den Verteidiger der Mühe, ihn erst aufklären zu müssen.
Gilt jedoch Gl.(29), so wird r_N auch von der blauen Streitkraft beeinflußt: Ist die Fähigkeit der blauen Einheiten, sich der Aufklärung durch den Gegner zu entziehen, nur gering ausgebildet, ist ihre Ausnutzung des Geländes schlecht, ihr Verhalten im Versteck unvorsichtig, so wird den roten Einheiten die Aufklärung gegen den Gegner erleichtert, was eine Verkürzung der für die Aufklärung benötigten Zeit zur Folge hat.

Noch in einer weiteren Weise wird r_N, bei Unterstellung der Gültigkeit von Gl.(29), von dem Verhalten von Blau beeinflußt: Wenn angenommen wird, daß die blauen Einheiten bei Beginn der Kampfaktionen auf einer bestimmten Fläche F_M gleichmäßig zufällig verteilt sind, wenn ferner angenommen wird, daß im Laufe der Kampfaktionen eine Anzahl der blauen Einheiten vernichtet wird, so kann die Führung von Blau auf diese Verminderung der Truppenstärke in zweierlei Weise reagieren:

- sie kann eine stets gleichbleibende Fläche mit ständig abnehmender Dichte verteidigen oder
- sie kann die Fläche entsprechend den Verlusten verringern, so daß auf dem von Blau verteidigten Gebiet die Dichte der blauen Einheiten stets die gleiche bleibt.

Wenn

$$T_{NA} = k_N \frac{F_M}{M} \qquad (31)$$

wobei:

k_N = Proportionalitätsfaktor, der u.a. Ausbildungsstand etc. berücksichtigt,

F_M = Fläche, die von M verteidigt wird,

dann kann entweder:

$$F_M(t) = F_M(0)$$

oder:

$$\frac{F_M(t)}{M(t)} = \frac{F_M(0)}{M(0)}$$

sein.

Gl.(31) verändert sich dann

bei gleichbleibender Fläche zu:

$$T_{NA} = k_N \frac{F_M(0)}{M(t)} \quad , \tag{32}$$

bei gleichbleibender Dichte zu:

$$T_{NA} = k_N \frac{F_M(0)}{M(0)} \quad . \tag{33}$$

Nun wird in der Realität ein Verteidigungskampf nicht in der Weise ablaufen, daß entweder die gleiche Fläche mit ständig abnehmender Dichte oder eine ständig kleiner werdende Fläche mit gleichbleibender Dichte verteidigt wird; es wird vielmehr so sein, daß im Verlauf der Verteidigung sowohl die Fläche als auch die Dichte abnimmt. Wenn dennoch dieser der Realität am besten entsprechende Fall in der Folge hier nicht untersucht wird, dann deswegen, weil über die Art und Weise, wie die Fläche bei abnehmender Zahl von Einheiten vermindert wird, keine weithin gültigen Verhaltensregeln bestehen, die modellhaft in Gleichungen gefaßt werden könnten: Grundsätzlich ist es so, daß der im Besitz der eigenen Truppe befindliche Raum um jeden Preis gehalten werden muß und nur auf Befehl einer höheren Führung aufgegeben werden darf. Wann jedoch der Befehl erteilt wird, aus der Verminderung der Dichte die Konsequenz zu ziehen und die zu verteidigende Fläche zu vermindern, ist ungewiß. Gewiß ist nur, daß in einem solchen Fall die Verminderung der Fläche sprunghaft vor sich gehen wird. Mit einiger Sicherheit kann angenommen werden, daß der örtliche Führer hin und wieder durch die Entwicklung der Lage dazu gezwungen wird, Raum aufzugeben noch bevor es

befohlen wurde; in aller Regel ist in solchen Fällen die vorgesetzte Führungsebene über die Lageentwicklung nicht mehr hinreichend informiert, so daß sie nur in Unkenntnis den Befehl zur Verminderung der Fläche noch nicht gegeben hat. In einem derartigen Fall wird der örtliche Führer, weil er gegen den bestehenden Grundsatzbefehl handeln muß, den Befehl zur Aufgabe von Raum meist später geben, als es unter normalen Umständen, bei ausreichendem Informationsfluß die vorgesetzte Führungsebene getan hätte. Denkbar ist ferner, daß im Rahmen des Verteidigungskampfes gelegentlich eine zeitweilig vergrößerte Fläche mit folglich sehr stark verminderter Dichte, zeitweilig aber auch eine sehr stark verminderte Fläche mit folglich zeitweilig vermehrter Dichte verteidigt wird.

2.4. Kampfwerte für unterschiedliche Kampfsituationen

Je nach dem Verhalten des Gegners verändert sich also der Ausdruck für die Kampfkraft. Die verschiedenen Ausdrücke eingesetzt in Gl.(8a) ergeben

wenn Blau angreift, gem.Gl.(3o):

$$\overline{\frac{dM(t)}{dt}} = - \frac{p_N}{T_{NK}} N(t) \quad , \tag{34}$$

wenn Blau, gem.Gl.(32), eine stets gleichbleibende Fläche verteidigt:

$$\overline{\frac{dM(t)}{dt}} = - \frac{p_N}{k_N F_M(0)} N(t) M(t) \quad , \tag{35}$$

wenn Blau, gem.Gl.(33), mit stets gleichbleibender Dichte verteidigt:

$$\overline{\frac{dM(t)}{dt}} = - \frac{p_N M(0)}{k_N F_M(0)} N(t) \quad . \tag{36}$$

Da das Kampfgeschehen beschrieben wird durch ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen, da jede der beiden gegnerischen Streitkräfte drei verschiedene Möglichkeiten hat, den Kampf zu führen, ergeben sich insgesamt neun Kombinationen, die sich in drei Gruppen zusammenfassen lassen[38]:

1.) Beidseitiger Angriff:

$$\dot{M}(t) = -\frac{p_N}{T_{NK}} N(t)$$

$$\dot{N}(t) = -\frac{p_M}{T_{MK}} M(t)$$

2.) Feuerduell, i.e.S. beide Seiten kämpfen aus der Deckung heraus:

a)

$$\dot{M}(t) = -\frac{p_N}{k_N F_M(0)} N(t)\, M(t)$$

$$\dot{N}(t) = -\frac{p_M}{k_M F_N(0)} M(t)\, N(t)$$

b)

$$\dot{M}(t) = -\frac{p_N}{k_N F_M(0)} N(t)\, M(t)$$

$$\dot{N}(t) = -\frac{p_M N(0)}{k_M F_N(0)} M(t)$$

c)

$$\dot{M}(t) = -\frac{p_N M(0)}{k_N F_M(0)} N(t)$$

$$\dot{N}(t) = -\frac{p_M}{k_M F_N(0)} M(t)\, N(t)$$

---

38) Eine andere Möglichkeit, die Kombinationen der verschiedenen Verhaltensmöglichkeiten zu deuten, als die hier nachfolgend angegebene von Brackney, findet sich bei Deitchman, op.cit. und, in Anlehnung daran, bei Kisi, T. u. Hirose, T.: Winning Probability in an Ambush Engagement; OR, vol. 14, 1966, S. 1137 ff. Dort wird der für die Guerillakriegführung so bedeutsame Hinterhalt analysiert.

d)

$$\dot{M}(t) = - \frac{p_N \, M(0)}{k_N F_M(0)} \, N(t)$$

$$\dot{N}(t) = - \frac{p_M \, N(0)}{k_M F_N(0)} \, M(t)$$

3.) Angriff gegen Verteidigung

a)

$$\dot{M}(t) = - \frac{p_N}{T_{NK}} \, N(t)$$

$$\dot{N}(t) = - \frac{p_M}{k_M F_N(0)} \, M(t) \, N(t)$$

b)

$$\dot{M}(t) = - \frac{p_N}{T_{NK}} \, N(t)$$

$$\dot{N}(t) = - \frac{p_M \, N(0)}{k_M F_N(0)} \, M(t)$$

c)

$$\dot{M}(t) = - \frac{p_N}{k_N F_M(0)} \, N(t) \, M(t)$$

$$\dot{N}(t) = - \frac{p_M}{T_{MK}} \, M(t)$$

d)

$$\dot{M}(t) = - \frac{p_N \, M(0)}{k_N F_M(0)} \, N(t)$$

$$\dot{N}(t) = - \frac{p_M}{T_{MK}} \, M(t)$$

Nach formal-mathematischen Gesichtspunkten lassen sich die neun Fälle in drei verschiedene Systeme simultaner Differentialgleichungen einordnen: [39]

39) Zur Lösung der Systeme simultaner Differentialgleichungen s. Anhang 3

1. Die Fälle 1., 2.d), 3.b) und 3.d) haben die folgende Form: [40]

$$\dot{x}(t) = -a\,y(t)$$
$$\dot{y}(t) = -b\,x(t)$$

mit der expliziten Lösung:

$$x(t) = x(0)\cosh\sqrt{ab}\,t - \sqrt{\frac{a}{b}}\,y(0)\sinh\sqrt{ab}\,t \qquad (37a)$$

$$y(t) = y(0)\cosh\sqrt{ab}\,t - \sqrt{\frac{b}{a}}\,x(0)\sinh\sqrt{ab}\,t \qquad (37b)$$

2. Die Fälle 2.b), 2.c), 3.a) und 3.c) haben die folgende Form:

$$\dot{x}(t) = -a\,y(t)\,x(t)$$
$$\dot{y}(t) = -b\,x(t)$$

bzw.

$$\dot{x}(t) = -a\,y(t)$$
$$\dot{y}(t) = -b\,x(t)\,y(t)$$

mit der expliziten Lösung:

$$x(t) = \frac{2c}{ab(1+\cos\sqrt{2c}\,(t+C))} \qquad (38a)$$

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2c}}{a}\tan\sqrt{c/2}\,(t+C) \qquad (38b)$$

40) Vgl. Gl.(9)

wobei:

$$c = ab\,x(0) - \frac{a^2\,y(0)^2}{2}$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{2c}} \arctan \frac{-a\,y(0)}{\sqrt{2c}}$$

Für: $\dot{x}(t) = -a\,y(t)$
$\dot{y}(t) = -b\,x(t)\,y(t)$

ist die Lösung entsprechend.

3. Der Fall 2.a) hat die folgende Form:

$$\dot{x}(t) = -a\,x(t)\,y(t)$$
$$\dot{y}(t) = -b\,x(t)\,y(t)$$

mit der expliziten Lösung:

$$x(t) = \frac{c}{b}\,\frac{1}{1 - e^{c(t+C)}} \qquad (39a)$$

$$y(t) = \frac{c}{a}\,\frac{e^{c(t+C)}}{1 - e^{c(t+C)}} \qquad (39b)$$

wobei: $c = bx(0) - ay(0)$

$$C = \frac{1}{c} \ln \frac{ay(0)}{ay(0) + c}$$

Durch Einsetzen der Konstanten in die expliziten Lösungen sind ohne weitere Schwierigkeit die die einzelnen Kampfsituationen beschreibenden Gleichungen zu erhalten.

Wenn z.B. Blau angreift und Rot mit gleichbleibender Dichte verteidigt (Fall 3.b)), so ergibt sich die explizite Lösung wie folgt: 41)

$$\overline{M(t)} = M(0)\cosh\sqrt{\frac{p_N\, p_M\, N(0)}{T_{NK}\, k_M\, F_N(0)}}\; t$$

$$- \sqrt{\frac{p_N\, k_M\, F_N(0)}{T_{NK}\, p_M\, N(0)}}\; N(0)\sinh\sqrt{\frac{p_N\, p_M\, N(0)}{T_{NK}\, k_M\, F_N(0)}}\; t$$

$$\overline{N(t)} = N(0)\cosh\sqrt{\frac{p_N\, p_M\, N(0)}{T_{NK}\, k_M\, F_N(0)}}\; t$$

$$- \sqrt{\frac{T_{NK}\, p_M\, N(0)}{p_N\, k_M\, F_N(0)}}\; M(0)\sinh\sqrt{\frac{p_N\, p_M\, N(0)}{T_{NK}\, k_M\, F_N(0)}}\; t$$

---

41) Engel, A Verification ..., op.cit., hat im Fall Iwo Jima festgestellt, daß mit Gleichungen der hier angeführten Art das tatsächliche Kampfgeschehen sehr gut beschrieben werden konnte; das Verhalten der gegnerischen Streitkräfte entsprach dabei dem hier gewählten Beispiel: während die Amerikaner angriffen, verteidigten die Japaner mit gleicher Dichte.

Die Zeit, derer es bedarf, um eine gezielte Kampfaktion durchzuführen, ist zerlegt worden in zwei Teilzeiten: in Zeit für Aufklärung und Zeit für Kampf i.e.S.

Bei der bisherigen Analyse wurde angenommen, daß, je nach der Lage, die eine der Teilseiten, verglichen mit der anderen, so kurz ist, daß sie vernachlässigt werden kann und nicht in die Analyse einzugehen braucht.

Dieser Annahme entspricht in der Wirklichkeit des Kampfgeschehens im wesentlichen nur der Fall, daß gegen einen über eine offene, deckungslose Fläche angreifenden Gegner gekämpft wird. Nur in diesem Falle ist der Zeitbedarf für Aufklärung nahe Null und kann somit vernachlässigt werden.

Muß jedoch gegen einen versteckten Gegner gekämpft werden, so ist zwar der Zeitbedarf für die Aufklärung ein großer; der Zeitbedarf für die Durchführung des Kampfes i.e.S. wird jedoch nicht nahe Null sein, wird nicht in einer Größenordnung liegen, die seine Vernachlässigung erlaubt. Das gilt für alle Waffen: selbst das Laden, Richten und Abfeuern eines Sturmgewehres erfordert eine gewisse, meßbare Zeit; je komplizierter das Waffensystem ist, umso mehr Zeit muß für die Durchführung des Kampfes i.e.S. aufgewandt werden.

Unter der Voraussetzung, daß die kämpfende Einheit sowohl den eigentlichen Kampf als auch die Aufklärung in zeitlicher Aufeinanderfolge durchführt, müssen Gl.(35) und Gl.(36) wie folgt modifiziert werden:

$$\frac{dM(t)}{dt} = - \frac{p_N \, M(t)}{\overline{M(t)} \; T_{NK} + k_N \; F_M(0)} \, N(t) \qquad (40)$$

und

$$\frac{dM(t)}{dt} = - \frac{p_N \, M(0)}{\overline{M(0)} \; T_{NK} + k_N \; F_M(0)} \, N(t) \qquad (41)$$

Im Falle von Gl.(41) ist dabei, im Vergleich zu Gl.(36), lediglich eine Veränderung des konstanten Faktors erfolgt. Die Gl.(40) ist jedoch eine von Gl.(35) wesentlich unterschiedene Differentialgleichung, so daß die Gleichungs-

systeme, die auf der Annahme der Verteidigung einer ständig gleichbleibenden Fläche mit abnehmender Dichte beruhen, neu aufgestellt werden müssen. [42)]

Die Fälle 2.b), 2.c), 3.a) und 3.c) haben dann die Form:

$$\dot{x}(t) = - \frac{a\, x(t)\, y(t)}{b\, x(t) + f}$$

$$\dot{y}(t) = - g\, x(t)$$

bzw.:

$$\dot{x}(t) = - a\, y(t)$$

$$\dot{y}(t) = - \frac{b\, x(t)\, y(t)}{f\, y(t) + g}$$

Der Fall 2.a) hat nunmehr die Form:

$$\dot{x}(t) = - \frac{a\, x(t)\, y(t)}{b\, x(t) + f}$$

$$\dot{y}(t) = - \frac{g\, x(t)\, y(t)}{h\, y(t) + k} \quad .$$

Die hier getroffenen Annahmen beschreiben jedoch nicht immer das Kampfgeschehen korrekt. Zumal im Falle der Artillerie, wo die beobachtenden, aufklärenden Teile der Einheiten auch räumlich von den die Geschütze oder Werfer bedienenden Teilen getrennt handeln, wird Aufklärung und Kampf i.e.S. nebeneinander betrieben, i.d.R. allerdings mit einem zeitlichen Vorlauf der Aufklärung.

In diesem Falle führt die Addition der Teilzeiten zu falschen Resultaten. Durch Äquivalenzziffern, die vermutlich nur auf der Basis von Erfahrungswerten gewonnen werden können, müssen Doppelzählungen vermieden werden.

---

42) Die Lösungen dieser Differentialgleichungssysteme werden nicht vorgeführt.

2.5. Schätzung der Auswirkung der Faktoren, die nicht beobachtet oder analytisch erfaßt werden können

Es ist bislang versucht worden, aufgrund von a-priori-Information über

- die Ausgangsstärken der gegnerischen Streitkräfte,
- die Trefferwahrscheinlichkeit bei einem Schuß, abgegeben auf ein Ziel bekannter Ausdehnung,
- die Ausdehnung des von den gegnerischen Parteien verteidigten Gebietes,
- die Zeit, die zur Durchführung einer Kampfaktion im eigentlichen Sinne, also zur Bedienung einer Waffe, notwendig ist,

die Kampfwertkoeffizienten zu bestimmen und numerisch spezifizierbar zu machen.

Das ist bisher nur gelungen im Falle des beiderseitigen, gleichzeitigen Angriffs.

In allen anderen acht Fällen bleibt bei der Analyse der Kampfkraftparameter stets ein Faktor, der Proportionalitätsfaktor k_N bzw. k_M, der nicht aufgrund schon bekannter Tatsachen bestimmt werden kann, sondern geschätzt werden muß.

Dieser Proportionalitätsfaktor muß, da die T_{NA} und T_{MA} ausgedrückt werden in Bruchteilen der gewählten Zeiteinheit, der Länge der Beobachtungsperioden Rechnung tragen.

Durch ihn wird aber auch ausgedrückt, daß neben den bislang explizit berücksichtigten Größen noch eine Vielzahl anderer Faktoren Einfluß hat auf die Veränderung der Stärke einer Streitkraft im Zeitablauf.

Diese Faktoren lassen sich in drei Gruppen zusammenfassen:

1. Faktoren, die dem Einfluß der beiden Streitkräfte entzogen sind, wie:
   - Witterung
   - Tageszeit
   - Jahreszeit
   - Gelände etc.
2. Faktoren, die dem Einfluß des Gegners unterliegen, wie:
   - Ausrüstung
   - Ausbildungsstand
   - Kampferfahrung
   - Deckungsbewußtsein etc.

   der gegnerischen Truppe.

3. Faktoren, die dem Einfluß der eigenen Partei unterliegen, wie:

   - Ausrüstung.
   - Ausbildungsstand
   - Kampfmoral,
   - Gerätezustand etc.

   der eigenen Truppe.

Diese Faktoren, einschließlich der hier nicht aufgezählten, üben einen Einfluß auf die Länge der Aufklärungszeit aus. Ihr Wirken muß folglich berücksichtigt werden.

Während die Faktoren der ersten Gruppe möglicherweise eine explizite Berücksichtigung im Modell finden könnten, [43] wenn auch dadurch das Modell einen Verlust an Einfachheit, Uebersichtlichkeit und Operabilität erleiden müßte, sind die Faktoren der zweiten und dritten Gruppe unmittelbar nicht zu quantifizieren. Um sie zu erfassen, ist es erforderlich, sich über ihre Auswirkungen auf das Kampfgeschehen Klarheit zu verschaffen. Das kann in der Weise geschehen, daß Erscheinungen, die in einer funktionalen Abhängigkeit zu diesen Faktoren stehen, beobachtet werden und daraus auf die Faktoren selbst rückgeschlossen wird. So ist ~~es~~ zweifelsohne die Zahl der Deserteure abhängig von der Kampfmoral der Truppe; so besteht vermutlich ein Zusammenhang zwischen Verletzungsquote und Kampferfahrung der Soldaten.

Derartige Zusammenhänge sind aber nicht in der Weise eindeutig, daß auf ihnen eine numerische Spezifizierung der Kampfwerte basieren könnte. Weiterhin sind diese Erscheinungen und diese Zusammenhänge bislang so wenig erforscht, daß z.B. die Zahl der Deserteure als Funktion der Zeit nicht formuliert werden kann.

Wenn also eine funktionale Darstellung der Wirkungen dieser Faktoren nicht möglich ist, muß ein anderer Weg ihrer Bestimmung beschritten werden: die Kampfwertkoeffizienten müssen geschätzt werden [44].

---

43) So muß z.B.der Einfluß der Tageszeit über irgendwelche Äquivalenzziffern gemessen werden, so daß sowohl die unterschiedliche Helligkeit, als auch der normalerweise zu erwartende Grad der menschlichen Ermüdung berücksichtigt wird.

44) Vgl.dazu Engel,J.H., A Verification ....op.cit..S.165 ff

Löst man Gl.(8) nach A und B auf, so erhält man:

$$A = -\frac{dM(t)}{N(t)\,dt} \qquad (42a)$$

und

$$B = -\frac{dN(t)}{M(t)\,dt} \qquad (42b)$$

Da Konstanz der Parameter über die Dauer des Gefechtes angenommen wird, gilt Gl.(42) für jedes beliebige t zwischen t = 0, dem Zeitpunkt des Beginns, und t = X, dem Zeitpunkt des Endes der Auseinandersetzung.

Es folgt dann durch Integration der Funktionen über den gesamten Beobachtungszeitraum als Schätzwert für die Parameter:

$$A^* = \frac{M(0) - M(X)}{\int_{t=0}^{X} N(t)\,dt} \qquad (43a)$$

und:

$$B^* = \frac{N(0) - N(X)}{\int_{t=0}^{X} M(t)\,dt} \qquad (43b)$$

Auf diese Art ist jedoch die Schätzung der Parameter praktisch nicht durchführbar, da die Integration der Gleichungen für M(t) und N(t) nicht zu befriedigenden Ergebnissen führt aufgrund der Tatsache, daß in den Gleichungen (9) die zu schätzenden Parameter wiederum enthalten sind.

Wenn jedoch das Kampfgeschehen in regelmäßigen Zeitabständen beobachtet worden ist, beginnend bei t = 0, endend bei t = X, und für diese t die jeweiligen M und N vorliegen, dann kann als Näherung an diese theoretisch exacten Werte berechnet werden:

$$\tilde{A} = \frac{M(0) - M(X)}{\sum_{t=0}^{X-1} N(t)} \qquad (44a)$$

und:

$$\tilde{B} = \frac{N(0) - N(X)}{\sum_{t=0}^{X-1} M(t)} \qquad (44b)$$

wobei: $\lim_{\Delta t \to dt} \tilde{A} = A^* \; ; \; \lim_{\Delta t \to dt} \tilde{B} = B^*$

Die hier vorgestellte Methode wird befriedigende Ergebnisse dann liefern, wenn es sich um die Analyse von Kampfgeschehen in der Vergangenheit handelt, denn eine Schätzung ist nur dann möglich, wenn über das zu analysierende Ereignis Beobachtungen vorliegen.

Soll das Modell jedoch für Prognosen verwendet werden, so ist eine Schätzung nicht möglich. Es ist dann nur möglich, Schätzwerte aus der Vergangenheit zu übernehmen. Dabei ist dann darauf zu achten, daß die Bedingungen, unter denen das zukünftige Geschehen ablaufen wird, möglichst genau den Bedingungen entsprechen, unter denen die Schätzwerte gewonnen wurden.

Die den Schätzungen in einem derartigen Fall anhaftenden Unsicherheit kann durch Verwendung der a-priori-Information vermindert werden. Dies geschieht durch Einsetzen von Gl.(44) in Gl.(35) oder Gl.(36).

.3. Unterschiede in den Kampfwerten der Einheiten einer Streitkraft

.3.1. Einführende Ueberlegungen

.3.1.1. Ursachen der unterschiedlichen Kampfwerte

Es wurde zunächst angenommen, daß jede der beiden Streitkräfte in sich aus Einheiten besteht, die sich bezüglich Funktion, Ausbildungsstand, Ausrüstung, Bewaffnung, Kampfmoral etc. nicht unterscheiden.

Diese Annahme ist wirklichkeitsfremd und soll nun fallengelassen werden. Eine Streitkraft ist zusammengesetzt aus einer Vielzahl von Einheiten, die sich durchaus voneinander unterscheiden. Dies gilt unabhängig von der Ebene, die untersucht wird. Selbst in einer Grenadiergruppe gibt es erkennbare und wesentliche Unterschiede, z.B.in der Bewaffnung.

Es kann im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht werden, welches das niedrigste, vertretbare Aggregationsniveau ist, wie weit die Aufteilung einer Streitkraft sinnvoll durchgeführt werden kann, ob z.B. ein Artilleriebataillon als Einheit angesehen werden muß, oder ob es möglich ist, die einzelne Batterie oder gar das einzelne Geschütz als Einheit anzusprechen [45]. Es soll hier nur festgestellt werden, daß eine Streitkraft aus verschiedenartigen Einheiten besteht, die sich in ihrer Kampfkraft klar voneinander unterscheiden.

Es wird hierbei in der Folge vernachlässigt, daß sich gleichartige Einheiten, z.B.zwei Kampfpanzer gleichen Typs, durchaus bezüglich ihrer Kampfkraft unterscheiden können, sei es aufgrund unterschiedlicher Funktion (Panzer des Kompaniechefs ⟷ beliebiger anderer Panzer der Kompanie), sei es

---

45) Unsinnig ist zweifelsohne die Vorstellung, ein Artilleriebataillon sei zusammengesetzt aus einer bestimmten Anzahl von Artilleriesoldaten, die, jeder für sich, ausgerüstet mit einem bestimmten Bruchteil eines Geschützes, einem bestimmten Bruchteil der Beobachtungsorgane des Bataillons, einer bestimmten Munitionsmenge etc., in der Lage seien zu kämpfen.

aufgrund unterschiedlicher Kampfmoral etc. Es wird vielmehr angenommen, daß gleichartige Einheiten auch von gleicher Kampfkraft seien [46], so daß gleichartige Einheiten zu Gruppen zusammengefaßt werden können.

Es wird ferner angenommen, daß sich die Kampfkraft der Einheiten über die Dauer des Gefechtes nicht verändern. Diese Annahme ist der Realität nicht adäquat. Sie unterstellt z.B. Konstanz der Kampfkraft auch dann, wenn in einem beweglich geführten Gefecht der Schauplatz des Geschehens sich verlagert in ein Gelände von völlig anderer Beschaffenheit, oder wenn sich im Laufe des Gefechtes die Witterungs- und Beleuchtungsbedingungen wesentlich ändern.

Es wird auch vernachlässigt, daß das Zusammenfassen verschiedenartiger Einheiten zum Zwecke der Durchführung gemeinsamer Kampfaktionen, also z.B. die Verstärkung eines Panzergrenadierbataillons durch eine Panzerkompanie für einen Angriff, die Kampfkraft, den Kampfwert der an dieser Aktion beteiligten Einheiten beeinflußt, i.d.R.erhöht, und daß eine aus ihrem Verband herausgelöste Einheit einen anderen, i.d.R. geringeren Kampfwert hat, als dieselbe Einheit innerhalb ihres Verbandes. [47]

---

46) Zu der Frage der Größen, die auf die Kampfkraft einer Einheit Einfluß haben, vgl.: Lützow,J.:Statistische Erfassung ...,op.cit.
ders.: Human Factors; Wehrtechnische Monatshefte, vol.64, 1967, S.382 ff.
ders.: Eine Studie für Kampfwertvergleiche im Landkampf; Wehrtechnische Monatshefte, vol.64,1967, S.425 ff.

47) Lützow,J.: Eine Studie .... op.cit.,vol.64,1967, S.429, meint zu diesem Problem:
"Es ist nicht sinnvoll, vom Kampfwert eines einzelnen Kampfpanzers zu sprechen, sondern er ergibt sich aus seinem Effekt in der Einheit (= Kompanie;Anm.d.Verf.) und in den Kombinationen mit anderen Waffen. Es wird also der taktische Nutzwert der aus ihm gebildeten Einheiten (= Kompanien; Anm.d.Verf.) innerhalb der Kampfgruppen der verbundenen Waffen festzustellen sein."

Es wird schließlich ein eng mit der Frage der Bewertung der verbundenen Waffen zusammenhängendes Problem nicht untersucht: wie kann der Kampfwert von Einheiten, deren Aufgabe nicht primär im Kampf mit der Waffe besteht [48], erfaßt werden; wie ist ihr Vorhandensein oder Fehlen explizit zu berücksichtigen?

.3.1.2. Äquivalenzziffern

Wenn eine Streitkraft heterogen ist, also zusammengesetzt aus verschiedenartigen Einheiten, die sich bezüglich ihrer Kampfkraft voneinander unterscheiden, so muß zunächst die Möglichkeit einer künstlichen Homogenisierung mit Hilfe von Äquivalenzziffern untersucht werden.

Eine derartige Homogenisierung ist aber nicht möglich, da die verschiedenartigen Einheiten bezüglich ihrer Kampfkraft nicht in einer festen Relation zueinander stehen, sondern diese relative Kampfkraft sich je nach dem zu vernichtenden Objekt und dem Zustand und der Lage, in dem sich das Objekt befindet, ändert. So kann z.B.ein Kampfpanzer die 6o-fache Kampfkraft eines einzelnen Grenadiers haben, wenn Jagdpanzer vernichtet werden sollen, er ist dann '6o Grenadiere wert'; geht es aber darum, Geschütze der Artillerie zu bekämpfen, entspricht die Kampfkraft dieses Kampfpanzers vielleicht nur noch der Kampfkraft von 2o, vielleicht aber auch der von 2oo Grenadieren.

Daraus folgt, daß es nicht möglich ist , für die Stärke einer heterogenen Streitkraft zu einem beliebigen Zeitpunkt einen einzigen Wert anzugeben.

Daraus folgt aber auch, daß es bei heterogenen Streitkräften nicht einen Erwartungswert für die Stärke zu einem bestimmten Zeitpunkt und einen dazugehörigen Wert für die Streuung gibt, sondern, bei Vorhandensein von x Gruppen, x Erwartungswerte mit x verschiedenen Streuungen.

---

48) Gedacht werden muß hier sowohl an Einheiten, die militärische Führungsaufgaben wahrzunehmen haben, wie Stäbe, als auch an Einheiten, die eine rein unterstützende Funktion haben, z.B.Feldlazarette, LKW zum Munitionstransport einschl.Besatzung, Feldkabelbautrupps, Instandsetzungsgruppen etc.

1.3.2. Berücksichtigung der unterschiedlichen Kampfwerte mit Hilfe der Erwartungswerte der Binomialverteilung

1.3.2.1. Aufbau des Modells

Es wird angenommen:

- daß eine Streitkraft Blau aus insgesamt M Einheiten besteht, die sich zu m verschiedenen, in sich homogenen Gruppen zusammenfassen lassen (M_1, M_2,...,M_i,...,M_m);
- daß dieser Streitkraft Blau eine in sich homogene Streitkraft Rot gegenübersteht, die aus N Einheiten besteht;
- daß jede Einheit der i-ten Gruppe von Blau gegenüber jeder Einheit von Rot die gleiche Wirksamkeit hat, daß aber die Wirksamkeit einer Einheit der i-ten Gruppe sich unterscheidet von der Wirksamkeit einer Einheit einer anderen Gruppe von Blau;
- daß alle Einheiten von Rot gegenüber jeder Einheit der i-ten Gruppe von Blau die gleiche Wirksamkeit haben, daß aber die Wirksamkeit einer beliebigen Einheit von Rot gegenüber einer Einheit aus einer beliebigen anderen Gruppe von Blau davon verschieden ist;
- daß jede Einheit von Blau mit jeder Einheit von Rot im Kampf zusammentreffen kann;
- daß der Kampf in der Weise abläuft, daß beide Streitkräfte mit all ihren Einheiten gleichzeitig, zum Zeitpunkt t=0, ins Gefecht treten.

Die Gesamtstärke von M läßt sich als m-dimensionaler Vektor $\mathcal{m}$ schreiben:

$$\mathcal{m} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ Mi \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix} \tag{45}$$

wobei: M_i = Anzahl der Einheiten, aus denen die i-te Gruppe der blauen Streitkraft besteht

Die Gesamtstärke von N läßt sich, da Rot aus in sich homogenen Einheiten besteht, durch eine einzige Zahl angeben.

Die Einheiten von Rot werden nun in der Lage sein, aus jeder der m Gruppen von Blau in einer Zeiteinheit eine bestimmte Anzahl von Einheiten zu vernichten. Bei einer Ausgangsstärke der blauen Streitkraft von

$$\mathcal{m}(0) = \begin{pmatrix} M_1(0) \\ \vdots \\ M_m(0) \end{pmatrix} \tag{46}$$

folgt als Erwartungswert für die Zahl der überlebenden Einheiten von Blau zum Zeitpunkt t:

$$\overline{\mathcal{m}(t)} = \begin{pmatrix} \overline{M_1(t)} \\ \vdots \\ \overline{M_m(t)} \end{pmatrix} \tag{47}$$

Aus der Definition des Erwartungswertes der Binomialverteilung folgt dann:

$$\overline{m(t)} = \begin{pmatrix} M_1(0) & p_{B_1}(t) \\ & \vdots \\ M_m(0) & p_{B_m}(t) \end{pmatrix} \tag{48}$$

wobei: $p_{B_i}(t)$ = Überlebenswahrscheinlichkeit einer blauen Einheit aus der i-ten Gruppe zum Zeitpunkt t

Gilt Gl.(9a) [49], so erhält $p_{B_i}(t)$ die folgende Form:

$$p_{B_i}(t) = \cosh\sqrt{A_i B_i}\, t - \sqrt{\frac{A_i}{B_i}}\,\frac{N(0)}{M_i(0)}\,\sinh\sqrt{A_i B_i}\, t \tag{49}$$

wobei: A_i = Erwartungswert für den Bruchteil einer blauen Einheit aus der i-ten Gruppe, der in einer Zeiteinheit von einer Einheit von Rot vernichtet wird

B_i = Erwartungswert für den Bruchteil einer Einheit von Rot, der in einer Zeiteinheit von einer blauen Einheit aus der i-ten Gruppe vernichtet wird.

---

49) Ob Gl.(9a) die Realität adäquat beschreibt, ist zweifelhaft, da mit der Verwendung dieser Beziehung angenommen wird, daß sich die Kämpfe der i-ten Gruppe unabhängig von den Kämpfen der j-ten Gruppen ($j \neq i$) abspielen, daß der Ausgang dieser Begegnungen von den Ergebnissen jener nicht beeinflußt werde. Der Einfachheit wegen wird hier jedoch mit dieser Annahme gearbeitet. Siehe dazu auch Fußnote 13).

Es folgt für den Erwartungswert der Gesamtstärke von Blau zum Zeitpunkt t:

$$m(t) = \begin{pmatrix} M_1(0)\left[\cosh\sqrt{A_1 B_1}\,t - \sqrt{\frac{A_1}{B_1}}\,\frac{N(0)}{M_1(0)}\sinh\sqrt{A_1 B_1}\,t\right] \\ \vdots \\ M_m(0)\left[\cosh\sqrt{A_m B_m}\,t - \sqrt{\frac{A_m}{B_m}}\,\frac{N(0)}{M_m(0)}\sinh\sqrt{A_m B_m}\,t\right] \end{pmatrix} \quad (50)$$

Als nächstes ist die Veränderung der Stärke von Rot im Zeitablauf als Folge der Einwirkungen der m Gruppen von Blau zu untersuchen:

Ist:

$$N(t) = N(0)\, p_R(t)\,,$$

wobei: $p_R(t)$ = Überlebenswahrscheinlichkeit einer Einheit von Rot zum Zeitpunkt t,

so wird die rote Einheit nur dann überlebt haben, wenn sie sowohl die Kampfaktionen der blauen Einheiten der 1.Gruppe, als auch die der 2., ..., i-ten, ..., m-ten Gruppe überlebt hat.

Wenn:

$p_{R_i}(t)$ = Überlebenswahrscheinlichkeit einer Einheit von Rot zum Zeitpunkt t, bezogen auf die Kampfaktionen der blauen Einheiten der i-ten Gruppe,

dann ist:

$$N(t) = N(0) \prod_{i=1}^{m} p_{R_i}(t). \quad (51)$$

Gilt Gl.(9b), dann erhält $p_{R_i}(t)$ die folgende Form:

$$p_{R_i}(t) = \cosh\sqrt{A_i B_i}\,t - \sqrt{\frac{B_i}{A_i}}\,\frac{M_i(0)}{N(0)}\sinh\sqrt{A_i B_i}\,t \quad (52)$$

Es folgt dann für N(t):

$$N(t) = N(0) \prod_{i=1}^{m} \left[\cosh\sqrt{A_i B_i} - \sqrt{\frac{B_i}{A_i}} \frac{M_i(0)}{N(0)} \sinh\sqrt{A_i B_i}\, t \right] \quad (53)$$

Wird die Annahme, daß die Streitkraft Rot aus N Einheiten von gleicher Kampfkraft besteht, fallengelassen, nimmt man statt dessen an, daß die rote Streitkraft aus N Einheiten besteht, die sich zu n verschiedenen, in sich homogenen Gruppen zusammenfassen lassen, von denen die j-te Gruppe aus N_j Einheiten besteht, dann folgt daraus, daß jede der m Gruppen von Blau den Einwirkungen jeder der n Gruppen von Rot und jede der n Gruppen von Rot den Einwirkungen jeder der m Gruppen von Blau ausgesetzt ist.

Die Stärke der i-ten Gruppe von Blau zum Zeitpunkt t ergibt sich dann wie folgt:

$$M_i(t) = M_i(0)\, p_{B_i}(t)\, p_{B_{i2}}(t) \dots p_{B_{ij}}(t) \dots p_{B_{in}}(t) \quad (54a)$$

Entsprechend gilt für die Stärke der j-ten Gruppe von Rot zum Zeitpunkt t:

$$N_j(t) = N_j(0)\, p_{R_{j1}}(t)\, p_{R_{j2}}(t) \dots p_{R_{ji}}(t) \dots p_{R_{jm}}(t) \quad (54b)$$

wobei: $p_{B_{ij}}(t)$ = Überlebenswahrscheinlichkeit einer blauen Einheit der i-ten Gruppe zum Zeitpunkt t, bezogen lediglich auf die Kampfaktionen der roten Einheiten der j-ten Gruppe,

$p_{R_{ji}}(t)$ = Überlebenswahrscheinlichkeit einer roten Einheit der j-ten Gruppe zum Zeitpunkt t, bezogen auf die Kampfaktionen der blauen Einheiten der i-ten Gruppe.

Dabei ist dann:

$$p_{B_{ij}}(t) = \cosh\sqrt{A_{ij}B_{ji}}\,t - \sqrt{\frac{A_{ij}}{B_{ji}}}\frac{N_j(0)}{M_i(0)}\sinh\sqrt{A_{ij}B_{ji}}\,t \qquad (55a)$$

und:

$$p_{R_{ji}}(t) = \cosh\sqrt{A_{ij}B_{ji}}\,t - \sqrt{\frac{B_{ji}}{A_{ij}}}\frac{M_i(0)}{N_j(0)}\sinh\sqrt{A_{ij}B_{ji}}\,t \qquad (55b)$$

wobei: A_{ij} = Erwartungswert für den Bruchteil einer blauen Einheit aus der i-ten Gruppe, der in einer Zeiteinheit von einer roten Einheit der j-ten Gruppe vernichtet wird,

B_{ji} = Erwartungswert für den Bruchteil einer roten Einheit aus der j-ten Gruppe, der in einer Zeiteinheit von einer blauen Einheit der i-ten Gruppe vernichtet wird.

Es folgt dann für die Erwartungswerte der Gesamtstärken von Blau und Rot zum Zeitpunkt t:

$$\mathfrak{M}(t) = \begin{pmatrix} M_1(0) & \prod_{j=1}^{n} p_{B_{1j}}(t) \\ M_2(0) & \prod_{j=1}^{n} p_{B_{2j}}(t) \\ \vdots & \vdots \\ M_i(0) & \prod_{j=1}^{n} p_{B_{ij}}(t) \\ \vdots & \vdots \\ M_m(0) & \prod_{j=i}^{n} p_{B_{mj}}(t) \end{pmatrix} \qquad (56a)$$

und:

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} N_1(0) & \prod_{i=1}^{m} p_{R_{1i}}(t) \\ N_2(0) & \prod_{i=1}^{m} p_{R_{2i}}(t) \\ \vdots & \\ N_j(0) & \prod_{i=1}^{m} p_{R_{ji}}(t) \\ \vdots & \\ N_n(0) & \prod_{i=1}^{m} p_{R_{ni}}(t) \end{pmatrix} \qquad (56b)$$

Da es keinen aus einem Wert bestehenden Ausdruck für die Stärke von Blau bzw.Rot gibt, kann es auch keinen aus einem Wert bestehenden Ausdruck für die Streuung geben. Die Streuung ergibt sich vielmehr für Blau als m-dimensionaler Vektor, dessen i-tes Element die Streuung der i-ten Gruppe von Blau zum Zeitpunkt t ausdrückt:

$$\mathcal{1}_{M_i(t)} = \begin{pmatrix} \sqrt{M_1(0) \prod_{j=1}^{n} p_{B_{1j}}(t) \left[1 - \prod_{j=1}^{n} p_{B_{1j}}(t) \right]} \\ \vdots \\ \sqrt{M_m(0) \prod_{j=1}^{n} p_{B_{mj}}(t) \left[1 - \prod_{j=1}^{n} p_{B_{mj}}(t) \right]} \end{pmatrix} \qquad (57a)$$

und für Rot als n-dimensionaler Vektor, dessen j-tes Element die Streuung der j-ten Gruppe von Rot zum Zeitpunkt t ausdrückt:

$$\mathcal{1}_{N_j(t)} = \begin{pmatrix} \sqrt{N_1(0) \prod_{i=1}^{m} p_{R_{1i}}(t) \left[1 - \prod_{i=1}^{m} p_{R_{1i}}(t) \right]} \\ \vdots \\ \sqrt{N_n(0) \prod_{i=1}^{m} p_{R_{ni}}(t) \left[1 - \prod_{i=1}^{m} p_{R_{ni}}(t) \right]} \end{pmatrix} \qquad (57b)$$

Die Gleichungen (56) und (57) gelten nur für:

$$t \geqq 0 ,$$

sie gelten somit nur dort, wo:

$$M_i(t) \leqq M_i(0)$$

und

$$N_j(t) \leqq N_j(0) .$$

Jede einzelne Gleichung gilt ferner nur, wenn:

$$M_i(t) \geqq 0$$

oder:

$$N_j(t) \geqq 0$$

erfüllt ist.

Ist eine beliebige Gruppe von Rot oder Blau schon vor Abschluß der Kampfaktionen gänzlich vernichtet, so bleibt ihre Stärke für den Zeitraum zwischen ihrer Vernichtung und dem Abschluß der Kampfhandlungen konstant Null. Es ist also nicht möglich, daß ein beliebiges $M_i(t)$ oder $N_j(t)$ negative Werte annimmt.

Das Ende der Kampfaktionen ist dann für den Zeitpunkt zu erwarten, für den erwartet wird, daß bei der unterliegenden Partei die letzte Einheit der letzten Gruppe vernichtet ist, wohingegen die siegreiche Partei noch mindestens in einer Gruppe über mindestens eine nicht vernichtete Einheit verfügt:

$$m(t) = 0 \quad \text{und} \quad n(t) \neq 0$$

oder:

$$m(t) \neq 0 \quad \text{und} \quad n(t) = 0 .$$

1.3.2.2. Anwendungsmöglichkeiten

Aus den Erwartungswerten und den Streuungen lassen sich die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung errechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, daß, bei einer Überlebenswahrscheinlichkeit einer blauen Einheit der i-ten Gruppe zum Zeitpunkt t von $p_{B_i}(t)$, von $M_i(0)$ blauen Einheiten der i-ten Gruppe zum Zeitpunkt t insgesamt α_i Einheiten überleben, ist:

$$P_{B_i}\left[M_i(0),\ \alpha_i;\ t;\ p_{B_i}(t)\right] = \binom{M_i(0)}{\alpha_i}\ p_{B_i}(t)^{\alpha_i}\ \left[1 - p_{B_i}(t)\right]^{M_i(0)-\alpha_i} \tag{58a}$$

und entsprechend:

$$P_{R_j}\left[N_j(0),\ \beta_j;\ t;\ p_{R_j}(t)\right] = \binom{N_j(0)}{\beta_j}\ p_{R_j}(t)^{\beta_j}\ \left[1 - p_{R_j}(t)\right]^{N_j(0)-\beta_j} \tag{58b}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß von der ersten Gruppe α_1, von der 2. Gruppe α_2, ... , von der i-ten Gruppe α_i, ... , von der m-ten Gruppe α_m Einheiten überleben, ergibt sich dann wie folgt:

$$P_B\left[M_i(0),\ \alpha_i;\ t;\ p_{B_i}(t)\right] = \prod_{i=1}^{m} \binom{M_i(0)}{\alpha_i}\ p_{B_i}(t)^{\alpha_i}\ \left[1 - p_{B_i}(t)\right]^{M_i(0)-\alpha_i} \tag{59a}$$

Entsprechend gilt:

$$P_R\left[N_j(0),\ \beta_j;\ t;\ p_{R_j}(t)\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \binom{N_j(0)}{\beta_j} p_{R_j}(t)^{\beta_j} \left[1 - p_{R_j}(t)\right]^{N_j(0)-\beta_j} \qquad (59b)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß von der 1. Gruppe mindestens α_1, von der 2. Gruppe mindestens α_2, ... , von der i-ten Gruppe mindestens α_i, ... , von der m-ten Gruppe mindestens α_m Einheiten überleben, ergibt sich dann wie folgt:

$$P_B\left[M_i(0),\ \alpha_i;\ t;\ p_{B_i}(t)\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{\alpha_i=\alpha_i}^{M_i(0)} \binom{M_i(0)}{\alpha_i} p_{B_i}(t)^{\alpha_i} \left[1 - p_{B_i}(t)\right]^{M_i(0)-\alpha_i} \right\} \qquad (60a)$$

und entsprechend:

$$P_R\left[N_j(0),\ b_j;\ t;\ p_{R_j}(t)\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{b_j=\beta_j}^{N_j(0)} \binom{N_j(0)}{b_j} p_{R_j}(t)^{b_j} \left[1 - p_{R_j}(t)\right]^{N_j(0)-b_j} \right\} \qquad (60b)$$

1.3.2.3. Statische Lösung des Gleichungssystems

Im Falle zweier in sich homogener Streitkräfte war es möglich, mit Hilfe der statischen Lösungen der Gleichungen (8) auf verhältnismäßig einfachem Wege die Fragen nach der siegreichen Partei, nach der Anzahl der nicht vernichteten Einheiten und nach dem Zeitpunkt der Vernichtung des Gegners zu beantworten.

Im Falle zweier in sich heterogener Streitkräfte ist dieser Weg nicht beschreitbar.

Da die Veränderung der Stärke einer Streitkraft in der Zeit sich zusammensetzt aus den Veränderungen der Stärken der einzelnen Gruppen, ergibt sich für die Veränderung der Stärke der Gesamtstreitkraft der folgende Vektor:

$$\dot{m}(t) = -\alpha\, n(t)$$

und:

$$\dot{n}(t) = -\beta\, m(t)$$

Das ist:

$$\begin{pmatrix} \frac{dM_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dM_m(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{n} A_{1j} N_j(t) \\ \vdots \\ -\sum_{j=1}^{n} A_{mj} N_j(t) \end{pmatrix}$$

und:

$$\begin{pmatrix} \frac{dN_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dN_n(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=n}^{m} B_{1i} M_i(t) \\ \vdots \\ -\sum_{i=1}^{m} B_{ni} M_i(t) \end{pmatrix}$$

oder:

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = - A_{11}N_1(t) - \ldots - A_{1n}N_n(t)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dM_m(t)}{dt} = - A_{m1}N_1(t) - \ldots - A_{mn}N_n(t)$$

und:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = - B_{11}M_1(t) - \ldots - B_{1m}M_m(t)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dN_n(t)}{dt} = - B_{n1}M_1(t) - \ldots - B_{nm}M_m(t) \quad .$$

Diese m + n Gleichungen bilden ein System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Für derartige Gleichungssysteme gibt es Lösungen in der Literatur [50].

1.3.2.4. Probleme des Schätzens der A_{ij} und B_{ji}

Um die Gleichungen durchrechnen zu können, ist es notwendig, die numerische Größe der A_{ij} und der B_{ji} zu bestimmen.

Hierbei ist eine vollständige Bestimmung der Faktoren aufgrund von a-priori-Information nicht möglich. Es muß folglich versucht werden, die Faktoren zu schätzen.

Wenn $M_i(t)$ Ausdruck ist für die zahlenmäßige Stärke der i-ten Gruppe der Streitkraft Blau zum Zeitpunkt t, dann ist:

---

50) S. z.B. Bronstein, J.N. und Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik; 6.Aufl., Zürich, Frankfurt/Main 1966, S. 391 ff

$$\frac{dM_i(t)}{dt} = -A_{i1}N_1(t) - A_{i2}N_2(t) - \ldots - A_{ij}N_j(t) - \ldots - A_{in}N_n(t) \tag{61}$$

Daraus folgt:

$$M_i(x) - M_i(0) = -A^*_{i1}\int_{t=0}^{x} N_1(t)\,dt - A^*_{i2}\int_{t=0}^{x} N_2(t)\,dt - \ldots$$

$$\ldots - A^*_{ij}\int_{t=0}^{x} N_j(t)\,dt - \ldots - A^*_{in}\int_{t=0}^{x} N_n(t)\,dt. \tag{62}$$

Dieser Weg erweist sich sofort als nicht begehbar, da die Gleichungen für die $N_j(t)$, die Gl.(54) also, nicht zu befriedigenden Integrationsergebnissen führen, da sie ihrerseits die zu schätzenden Parameter enthalten.

Als Näherung kann, beim Vorliegen von Beobachtungswerten über die Stärken der Streitkräfte von t = 0 bis t = X, der folgende Ausdruck dienen:

$$\Delta M_i(t) = -A_{i1}N_1(t) - A_{i2}N_2(t) - \ldots - A_{ij}N_j(t) - \ldots - A_{in}N_n(t) \tag{63}$$

wobei: $\Delta M_i(t) = M_i(t) + M_i(t+1)$.

Das führt zu:

$$M_i(x) - M_i(0) = -\tilde{A}_{i1}\sum_{t=0}^{x-1} N_1(t) - \tilde{A}_{i2}\sum_{t=0}^{x-1} N_2(t) - \ldots$$

$$\ldots - \tilde{A}_{ij}\sum_{t=0}^{x-1} N_j(t) - \ldots - \tilde{A}_{in}\sum_{t=0}^{x-1} N_n(t). \tag{64}$$

Das ergibt insgesamt:

$$-\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \cdots & \tilde{A}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{m1} & \cdots & \tilde{A}_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{x-1} N_1(t) \\ \vdots \\ \sum_{t=0}^{x-1} N_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1(x) - M_1(0) \\ \vdots \\ M_m(x) - M_m(0) \end{pmatrix} \qquad (65a)$$

$$-\begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \cdots & \tilde{B}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{B}_{n1} & \cdots & \tilde{B}_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{x-1} \Pi_1(t) \\ \vdots \\ \sum_{t=0}^{x-1} \Pi_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1(x) - N_1(0) \\ \vdots \\ N_n(x) - N_n(0) \end{pmatrix} \qquad (65b)$$

Es stehen also zur Bestimmung der 2mn Parameter insgesamt m+n Gleichungen zur Verfügung. Da, mit Ausnahme des homogenen Falles, wo m=1 und n=1, $2mn > m+n$, ist die Zahl der Gleichungen zur Schätzung nicht ausreichend, können folglich die Parameter nicht geschätzt werden.

Um dennoch derartige Kampfmodelle aufstellen und numerisch spezifizieren zu können, bleibt einzig der mit großen Schwächen behaftete Weg (s.o.) der Expertenaussagen. 51)

---

51) Diesen Weg hat z.B.die Operations Research Gruppe der JABG in Ottobrunn beschritten. Dort wurden, sei es mit Hilfe von Fragebögen, die an Truppenkommandeure verschickt wurden, sei es auf einem "meeting" mit Offizieren, Werte für die Kampfkraft bestimmter Einheiten ermittelt, die sowohl in Kriegsspielen als auch in Objektstudien Verwendung finden. (Brief der ORG-JABG vom 18.12.1968 befindet sich im Besitz des Verfassers.)

1.3.2.5. Kampfwerte in Abhängigkeit von der räumlichen Verteilung der Einheiten

Bisher wurde versucht, die aus unterschiedlicher Funktion im Kampf, aus Unterschieden in Ausbildungsstand, Ausrüstung, Bewaffnung, Kampfmoral resultierende Heterogenität einer Streitkraft im Modell zu erfassen. Damit ist aber noch nicht der gesamte Unterschied in den Kampfwerten erklärt; das Modell muß zumindest noch um eine örtliche Komponente erweitert werden.

Zunächst wird angenommen, daß beide Streitkräfte in sich homogen sind.

Auf einem Schlachtfeld sind die beiden Streitkräfte nicht, wie bisher angenommen, gleichmäßig gemischt und zufällig verteilt, sondern sie befinden sich in einer gewissen Ordnung aufgestellt.

Daraus folgt, daß sich die Einheiten der einen Streitkraft den Einheiten der anderen Streitkraft gegenüber nicht indifferent verhalten, sondern gewisse "Präferenzen" gegenüber einzelnen dieser Einheiten entwickeln.

Daraus folgt aber auch, daß die Abweichungen im Verhalten der gegnerischen Einheiten zueinander nicht nur auf dem Zufall beruhen, daß eben nicht jeder Schütze sich zufällig einen Gegner heraussucht.

Daher ist die Annahme gleicher Kampfwerte für homogene Einheiten nicht zu rechtfertigen.

Das bedeutet, daß, um genau zu sein, für jede Einheit einzeln ausgerechnet werden müßte, wie es sich mit ihrer Überlebenswahrscheinlichkeit gegenüber den Aktionen einer jeden gegnerischen Einheit verhält. Die Gesamtüberlebenswahrscheinlichkeit dieser Einheit würde sich dann als Produkt aller einzelnen Überlebenswahrscheinlichkeiten ergeben.

Die Wahrscheinlichkeit der ersten Einheit von Blau, die Aktionen aller N Einheiten von Rot zu überleben, ist dann:

$$p_{B_1}(t) = \prod_{j=1}^{N} p_{B_1 j}(t)$$

In einem Gefecht, das von zahlreichen Einheiten auf beiden Seiten bestritten wird, wird die Mehrzahl dieser Überlebenswahrscheinlichkeiten gleich 1 sein oder sehr nahe bei 1 liegen, dies allein schon deswegen, weil die Waffen der gegnerischen Einheiten nur einen endlichen und meist auch seitlich durch die anderen Einheiten der eigenen Streitkraft eng begrenzten Wirkungsbereich haben. Die blauen Einheiten z.B., die außerhalb des Wirkungsbereiches der Waffen einer bestimmten roten Einheit liegen, haben, bezogen auf diese Einheit, eine Überlebenswahrscheinlichkeit von 1.

Die zu erwartende Gesamtstärke der Streitkraft Blau ergibt sich dann aus der Summe der Überlebenswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Einheiten von Blau.

Diese Konzeption mag zwar theoretisch richtig sein, sie ist aber, schon wenn es gilt, den Kampf zweier Bataillone zu beschreiben, unhandlich, da hierbei $2 \cdot N \cdot N \sim 5 \cdot 10^5$ Beziehungen zu untersuchen wären.

Praktikabel hingegen erscheint die Zusammenfassung mehrerer Einheiten zu Gruppen gemäß der militärischen Gliederung und gemäß der räumlichen Zusammengehörigkeit. Damit wird erreicht, daß die auf diese Weise gebildeten Gruppen aus Einheiten bestehen, die sich unterein-ander in ihrer Kampfkraft nicht wesentlich unterscheiden, denn, wenn man der militärischen Gliederung folgt, so gelangt man auf der unteren Führungsebene zu Gruppen, die in sich im oben definierten Sinne homogen sind. Dies gilt nicht nur für die friedensmäßige Gliederung, sondern gleichermaßen auch für die Gliederung im Kampf. So ist z.B. ein Panzerzug, der aus fünf Panzern (Kampfeinheit: Panzer + Besatzung), oder ein Zug Panzergrenadiere, der aus fünf Schützenpanzern (Kampfeinheit: Schützenpanzer + 8 Panzergrenadiere) besteht, eine solche, gemäß militärischer

Gliederung gebildete, in sich homogene Gruppe, der i.d.R. im Kampf ein bestimmter Raum zugewiesen wird, den sie allein besetzt, aus dem heraus nur sie kämpft.

Mit einiger Berechtigung kann angenommen werden, daß innerhalb einer derartigen Gruppe, z.B. innerhalb eines Zuges, die Einheiten über das von ihr besetzte Gelände gleichmäßig zufällig verteilt sind.

Die Angehörigen einer derartigen Gruppe hätten dann alle die gleichen durchschnittlichen Überlebenswahrscheinlichkeiten gegenüber den Aktionen einer jeden Einheit einer entsprechenden Gruppe des Gegners.
Es ergeben sich dann als Erwartungswerte für die Gesamtstärken zweier Streitkräfte Blau und Rot, die in k bzw. l regional unterscheidbare Gruppen gegliedert sind, zum Zeitpunkt t die folgenden Ausdrücke:

$$M(t) = M_1(0) \prod_{h=1}^{l} p_{B_{1h}}(t) + M_2(0) \prod_{h=1}^{l} p_{B_{2h}}(t) + \cdots$$

$$+ M_g(0) \prod_{h=1}^{l} p_{B_{gh}}(t) + \cdots + M_k(0) \prod_{h=1}^{l} p_{B_{kh}}(t) \qquad (66a)$$

$$N(t) = N_1(0) \prod_{g=1}^{k} p_{R_{1g}}(t) + N_2(0) \prod_{g=1}^{k} p_{R_{2g}}(t) + \cdots$$

$$+ N_h(0) \prod_{g=1}^{k} p_{R_{hg}}(t) + \cdots + N_l(0) \prod_{g=1}^{k} p_{R_{lg}}(t) \qquad (66b)$$

Dabei ist dann:

$p_{B_{gh}}(t)$ = Überlebenswahrscheinlichkeit einer Einheit der g-ten Gruppe der blauen Streitkraft zum Zeitpunkt t, bezogen auf die Kampfaktionen der roten Einheiten der h-ten Gruppe;

$p_{R_{hg}}(t)$ = läßt sich entsprechend deuten.

Die weiterführenden Überlegungen aus dem vorigen Abschnitt (S. -56- ff.) sind analog anwendbar mit der Einschränkung, daß, da es sich um homogene Einheiten handelt, aggregiert werden kann.

Wird die Annahme der Homogenität fallen gelassen, so bedeutet dies, daß die Gesamtstreitkräfte nach zweierlei Gesichtspunkten, nämlich nach den Kriterien der Heterogenität und gemäß der örtlichen Gliederung, gruppiert werden müssen.

Ansonsten kann wie im vorigen Abschnitt verfahren werden, wieder mit der Einschränkung, daß mögliche Aggregierungen durchzuführen sind.

Ein letzter Punkt soll in diesem Zusammenhang noch erwähnt werden:
Aus dem eben Gesagten folgt, daß die Annahme, daß die Kampfwerte über die Zeit hin, zumindest aber für die Dauer der untersuchten Kampfhandlung, konstant seien, im Falle der Berücksichtigung der örtlichen Gliederung, der tatsächlichen Verteilung der Streitkräfte im Kampfgebiet, nur auf eine in der Realität nicht vorkommende Kampfhandlung zutrifft, in der jede Einheit den zum Zeitpunkt t=0 eingenommenen Platz beibehält bis sie vernichtet wird oder bis die Kampfhandlung durch Vernichtung der letzten überlebenden Einheit des Gegners beendet wird. Für alle Kampfhandlungen jedoch, in denen sich die Einheiten bewegen, können die konstanten Kampfwerte nur als grobe Näherung gelten.

1.3.3. Das Modell von Dashiell und Fain

1.3.3.1. Die Methode

Einen anderen Weg zur Berücksichtigung der Heterogenität und der räumlichen Verteilung der Streitkräfte schlagen Dashiell und Fain vor: 52)

Ausgangspunkt sind die Gleichungen (8)

$$\dot{M}(t) = - AN(t)$$
$$\dot{N}(t) = - BM(t) \quad .$$

Das diesen Gleichungen zugrunde liegende Prinzip soll nun ausgedehnt werden auf die komplexe Situation des Kampfes zweier Streitkräfte, die jeweils aus verschiedenen Gruppen bestehen, deren gleichartige Einheiten sich von den Einheiten anderer Gruppen durch unterschiedliche Kampfkraft unterscheiden.

Die Streitkraft Blau habe eine Gesamtstärke M und sei zusammengesetzt aus m Gruppen, deren Stärke M_1, M_2, ..., M_i, ..., M_m sei.

Verändert sich die Gesamtstärke M im Laufe der Zeit, so muß diese Veränderung das Resultat der Summe der Veränderungen der Stärken der m Gruppen sein.

Betrachtet man eine beliebige Gruppe i, so hat diese die Stärke M_i. Die Veränderung der Stärke dieser i-ten Gruppe in der Zeit wird bewirkt durch die Einwirkungen der n Gruppen der Streitkraft Rot.

---

52) Dashiell,F.K. u. Fain,W.W.: Solution of the Extended Lanchester Equations used in a Tactical Warfare Simulation Programme; CORS Journal - Journal of the Canadian Operational Research Society, vol.4, 1966, S.89-96.

Nimmt man an, daß die Veränderung von M_i in der Zeit gleich der Summe der Einwirkungen der n Gruppen der Streitkraft Rot ist 53), so ergibt sich für $\dot{M}_i$:

$$\dot{M}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} - A_{ij} N_j(t) \qquad (67a)$$

Entsprechend gilt für die j-te Gruppe der Streitkraft Rot:

$$\dot{N}_j(t) = \sum_{i=1}^{m} - B_{ji} M_i(t). \qquad (67b)$$

Bei Verwendung der Matrizenschreibweise können die N_j betrachtet werden als die Elemente eines n-dimensionalen Spaltenvektors $\boldsymbol{n}$ und entsprechend die M_i als die Elemente eines m-dimensionalen Spaltenvektors $\boldsymbol{m}$.

A_{ij} ist dann das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte einer (m x n)-Matrix $\mathcal{A}$, und entsprechend ist B_{ji} das Element in der j-ten Zeile und der i-ten Spalte einer (n x m)-Matrix $\mathcal{B}$.

Mit dieser Schreibweise ergibt sich:

$$\dot{\boldsymbol{m}}(t) = - \mathcal{A}\, \boldsymbol{n}(t) \qquad (68a)$$

und:

$$\dot{\boldsymbol{n}}(t) = - \mathcal{B}\, \boldsymbol{m}(t) \qquad (68b)$$

---

53) Dashiell und Fain begründen die Addition der Einwirkungen wie folgt: "It is not unreasonable to assume that if one unit (d.h. in der Terminologie dieser Arbeit: eine Gruppe) is engaged with several opposing units, then its strength loss rate is the sum of the effects caused by each of the opposing units."; op.cit., S.89

Hierbei ist dann $\dot{\mathfrak{M}}(t)$ der Vektor, dessen i-tes Element $M_i(t)$ und $\dot{\mathfrak{N}}(t)$ der Vektor, dessen j-tes Element $N_j(t)$ ist.

Die Lösung des Gleichungssystems (68) ist, wie W.M. Whyburn gezeigt hat [54], unter sehr allgemeinen Bedingungen der Grenzwert des folgenden Iterationsprozesses:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(0)}(t) &= \mathfrak{M}(0) \\ \mathfrak{M}^{(n)}(t) &= \mathfrak{M}^{(0)}(t) - \mathfrak{A} \int_{u=0}^{t} \mathfrak{N}^{(n-1)}(u)\, du \\ \mathfrak{M}^{(\infty)}(t) &= \mathfrak{M}(t) \end{aligned} \qquad (69a)$$

und:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}^{(0)}(t) &= \mathfrak{N}(0) \\ \mathfrak{N}^{(n)}(t) &= \mathfrak{N}^{(0)}(t) - \mathfrak{L} \int_{u=0}^{t} \mathfrak{M}^{(n-1)}(u)\, du \\ \mathfrak{N}^{(\infty)}(t) &= \mathfrak{N}(t) \end{aligned} \qquad (69b)$$

wobei die hochgesetzten, eingeklammerten Ausdrücke (0), (n), (n-1) etc. angeben, um die wievielte Näherung es sich jeweils handelt.

---

54) Whyburn, W.M.: On the Fundamental Existence Theorems for Differential Systems; Annals of Mathematics, Series 2, vol. 30, 1928-9, S. 31 ff

Aus Gl.(69) ergibt sich bei Ausrechnung:

$$m(t) = m(0) - \alpha n(0)\, t + \alpha\beta m(0)\frac{t^2}{2!} - \alpha\beta\alpha n(0)\frac{t^3}{3!} + \alpha\beta\alpha\beta m(0)\frac{t^4}{4!} \cdots \quad (70a)$$

und:

$$n(t) = n(0) - \beta m(0)\, t + \beta\alpha n(0)\frac{t^2}{2!} - \beta\alpha\beta m(0)\frac{t^3}{3!} + \beta\alpha\beta\alpha n(0)\frac{t^4}{4!} \cdots \quad (70b)$$

wobei es ausreichen mag, die ersten fünf Glieder auszurechnen, um das Bildungsgesetz dieser Reihe erkennen zu lassen. In den meisten in der Wirklichkeit vorkommenden Situationen werden die Konstanten in diesen Gleichungen Werte von 1 oder kleiner annehmen, so daß die Reihen sehr schnell konvergieren. Die Berechnung von fünf Gliedern sollte schon eine ausreichende Genauigkeit ergeben.

Soweit das Verfahren von Dashiell und Fain.

1.3.3.2. Ergänzung

Die Verbindung des Modells von Dashiell und Fain zu dem Abnutzungsmodell von Lanchester in seiner ursprünglichen Form ist leicht herzustellen:

Lanchester ging aus von homogenen Einheiten. Diese Annahme übertragen auf das Modell von Dashiell und Fain bedeutet, daß die Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ reduziert werden auf die Skalare A und B, die Vektoren $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ auf die Skalare M und N.

Diese Skalare eingesetzt in Gl.(70) ergibt:

$$M(t) = M(0) - AN(0)t + ABM(0)\frac{t^2}{2!} - A^2BN(0)\frac{t^3}{3!} + A^2B^2M(0)\frac{t^4}{4!} \cdots$$

$$= M(0) + ABM(0)\frac{t^2}{2!} + A^2B^2M(0)\frac{t^4}{4!} + \cdots - AN(0)t - A^2BN(0)\frac{t^3}{3!} - \cdots$$

$$= M(0)\left(1 + \frac{(\sqrt{AB}\,t)^2}{2!} + \frac{(\sqrt{AB}\,t)^4}{4!} + \cdots\right) - \sqrt{A/B}\,N(0)\left(\sqrt{AB}\,t + \frac{(\sqrt{AB}\,t)^3}{3!} + \cdots\right)$$

Da [55]:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

und

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots ,$$

folgt für M(t):

$$M(t) = M(0)\cosh\sqrt{AB}\,t - \sqrt{A/B}\,N(0)\sinh\sqrt{AB}\,t$$

---

55) Kleine Enzyklopädie: Mathematik; Basel 1965, S. 504

und entsprechend für N(t):

$$N(t) = N(0) \cosh \sqrt{AB}\, t - \sqrt{B/A}\, M(0) \sinh \sqrt{AB}\, t \,.$$

Gl.(9) geht, wie zu erwarten, als Spezialfall aus Gl.(70) hervor für den Fall homogener Einheiten.

Die Methode von Dashiell und Fain zeichnet sich insbesondere durch zwei Eigenschaften aus:

- Sie verwendet die Lanchester-Gleichungen in ihrer deterministischen Form. Ihre Analyse hat folglich keine stochastischen Eigenschaften.
- Über die Koeffizientenmatrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ und deren Multiplikation beschreibt das Modell die Interdependenz sämtlicher Gruppen des Systems.

Durch die Annahme eindeutig bestimmter, funktionaler Beziehungen zwischen den beiden Streitkräften im Zeitablauf vermeidet diese Methode zwar die Schwierigkeit, eine bestimmte Verteilung zugrundelegen zu müssen, umgeht mithin all die aus dieser Entscheidung resultierenden Probleme (s.o. z.B. Fußnote 13), gewinnt dadurch an Geschlossenheit und Eleganz; das Modell gibt jedoch in seiner strikten Determiniertheit nur ein unzulängliches Bild von der Realität. "In Wahrheit wird jede (derartige) Beziehung (...) noch durch unübersehbar viele Faktoren beeinflußt, welche nicht im Modell repräsentiert sind."[56] Doch entsprechend den Versuchen in der Ökonometrie, mit diesem sich dort in gleicher Weise stellenden Problem fertig zu werden, kann auch hier eine Lösung versucht werden.

---

56) Menges, G.: Ökonometrische Prognosen; Köln, Opladen 1967, S. 17

Die Wirkung all dieser bislang unberücksichtigten Faktoren wird durch sogenannte "latente", Schock-" oder "Störvariablen" [57] berücksichtigt. Diese latenten Variablen werden als Zufallsvariablen gedacht.

Aus:

$$\dot{m}(t) + \alpha u(t) = 0$$

wird dann:

$$\dot{\tilde{m}}(t) + \alpha \tilde{u}(t) = \tilde{u}(t) \qquad (72)$$

wenn man, in erster Näherung, annimmt, daß sich die Wirkungen dieser Variablen, ob positiv oder negativ, additiv dem zu erwartenden Ablauf überlagern. $\tilde{u}(t)$ ist dann die Zusammenstellung der latenten Variablen zu einem m-dimensionalen Spaltenvektor. Wenn stochastische Unabhängigkeit der $u_i(t)$ von den $M_i(t)$ und $N_j(t)$ unterstellt wird, dann kann über sie die Annahme der Normalverteilung gemacht werden.[58] Es ergibt sich damit die Aufgabe, diese Variablen zu schätzen [59].

Bei der Behandlung der Störvariablen unterscheidet sich der militärische Bereich in einer Beziehung wesentlich von dem Bereich der Wirtschaft: Während hier die ausschließliche Verwendung linearer Abhängigkeiten durchaus sinnvoll , wenngleich nicht zwingend, begründet werden kann [60], rechtfertigen dort die Erkenntnisse aus der hier vorliegenden Arbeit ein derartiges Vorgehen nicht; in der Literatur scheint das Problem der linearen Abhängigkeiten im militärischen Bereich bisher nicht untersucht worden zu sein.

---

57) Menges, G.: Ökonometrie, op.cit., S. 37, 61

58) So Tinbergen, J.: Einführung in die Ökonometrie, Wien Stuttgart, 1952, S. 86 und Menges, G.: Ökonometrie, op.cit., S. 37; die Wahl der Normalverteilung ist zwar nicht zwingend; die Wahl einer anderen Verteilung wäre aber noch willkürlicher.

59) Es sei hier auf die angegebene ökonometrische Literatur, insbesondere aber auf: Menges, G.: Verfahren der Analyse der Arbeitskräftepolitik; Saarbrücken 1965, S. 78ff verwiesen.

Nun ist zwar das Dominieren linearer Funktionen nicht unabdingbare Voraussetzung für die additive Zuordnung der Störvariablen; dennoch muß, wenn das Modell von Dashiell und Fain in dieser Richtung erweitert werden soll, genau geprüft werden, ob die militärischen Sachverhalte, die durch die latenten Variablen ausgedrückt werden sollen, es erlauben, diese einfach zu addieren, oder ob eine sonstwie geartete Beziehung die Realität des Kampfes besser beschreibt.

1.3.3.3. Vergleich mit der Methode der Erwartungswerte der Binomialverteilung

Mit den Gleichungssystemen (70) und (56) in Verbindung mit (55) sind zwei Methoden zur Bestimmung der $M_i(t)$ und $N_j(t)$ vorgestellt worden. Sie führen zu unterschiedlichen Ergebnissen.

Ein Vergleich dieser beiden Methoden und ihrer Prämissen ergibt, daß beide Modelle zunächst nicht in völlig befriedigender Weise das Kampfgeschehen zwischen zwei in sich heterogenen Streitkräften beschreiben.

Das Modell auf der Basis der Multiplikation der Überlebenswahrscheinlichkeiten berücksichtigt die Interdependenz zwischen den Gruppen einer Streitkraft nicht. Das ist insofern eine große Schwäche des Modells, als immer dann, wenn sich zwei derartige Streitkräfte im Kampf gegenüberstehen, der Kampf einer bestimmten Gruppe im Zeitablauf nicht nur von der eigenen Stärke und dem eigenen Kampfwert, sowie von den Stärken und Kampfwerten aller gegnerischen Gruppen beeinflußt wird. Vielmehr wird das Kampfgeschehen bei den anderen Gruppen der eigenen Streitkraft, wird deren Schicksal im Verlaufe des Kampfes nicht ohne Einfluß bleiben auf diese eine betrachtete Gruppe. Die einzelnen Gruppen einer Streitkraft handeln nicht voneinander unabhängig, sind nicht nur durch den einen gemeinsamen Gegner verbunden. Die Aktionen einer Gruppe wirken sich immer, sei es förderlich, sei es hinderlich, auch auf die Lage der anderen Gruppen aus.

---

60) Tinbergen, J.: op.cit., S. 30 und Menges, G.: Ökonometrie, op.cit., S. 27

Das andere Modell ist insofern unbefriedigend, als es in seiner ursprünglichen Form das gesamte Kampfgeschehen deterministisch beschreibt. Diese strenge Bestimmtheit hat in der Realität des Kampfes keine Entsprechung.

Während aber ein sinnvoller Ansatz für die Berücksichtigung der Interdependenzen im ersten Modell nicht gefunden wurde, während also das hier vorgestellte Verfahren die ohne Zweifel vorhandenen Kovarianzen nicht auszudrücken vermag, kann der Nachteil des Modells von Dashiell und Fain durch Verwendung von Erkenntnissen aus der ökonometrischen Methodik vermindert werden. Und selbst, wenn es sich als unmöglich erweisen sollte, die Schockvariablen plausibel und gut zu schätzen, so ist damit dieses Modell nicht völlig wertlos. Untersuchungen, wenn auch bisher in geringer Zahl [61], haben die Anwendbarkeit der Lanchester-Gleichungen in ihrer deterministischen Form zumindest für die dort analysierten Lagen ergeben. Voraussetzung ist allerdings, daß die Zahl der Einheiten auf beiden Seiten recht groß ist[62].

Beim gegenwärtigen Stand der Theorie der Abnutzungsmodelle, wie in dieser Arbeit vorgestellt, folgt daraus, daß, solange in der Methode auf der Basis der Multiplikation der Überlebenswahrscheinlichkeiten die Kovarianz nicht in hinreichend befriedigender Form Berücksichtigung gefunden hat, die Methode von Dashiell und Fain in jedem Fall als Grundlage von weiterführenden Arbeiten dienen sollte.

---

61) Engel, J.H.: A Verification ..., op. cit.
Weiss, H.K.: Combat Models ..., op.cit.
Dathe, H.M. und Nauschütz, B.: Analytical Approach to the Evaluation of Combats Between Fighter Forces; Ottobrunn 1966, IABG-ORG/MS-4

62) Diesen Nachweis führt Brooks, F.C.: The Stochastic Properties of Large Battle Models; OR, vol 13, 1965, S. 1ff

1.4. Der optimale Einsatz knapper militärischer Mittel

1.4.1. Die Wahl des Bewertungsmaßstabes

1.4.1.1. Erfüllung des militärischen Auftrages als übergeordnetes Ziel

In den vorangegangenen Abschnitten ist ein Modell entwickelt worden, welches, bei Kenntnis der Anfangsbedingungen, geeignet erscheint, den Verlauf von Kampfhandlungen zu beschreiben.

Im folgenden soll untersucht werden, inwieweit, u.a.mit Hilfe dieses Modells, Kriterien für den Einsatz der verfügbaren Streikräfte, der Waffen und Waffensystem, gefunden werden können.

Zunächst einmal scheint es nahezuliegen, als derartiges Kriterium die Wirksamkeit, d.h.die Fähigkeit, den erteilten Auftrag auszuführen, zu wählen. Die Wahl der Wirksamkeit als Bewertungsmaßstab bietet sich vor allem deswegen an, weil die Erfüllung des Auftrages im militärischen Bereich Vorrang vor allen anderen Überlegungen hat und weil man seit altersher gewohnt ist, in der Erfüllung des Auftrages einen unbezweifelbaren, absoluten Erfolgsmaßstab zu sehen.

Dennoch ist die Wahl der Wirksamkeit als Bewertungsmaßstab abzulehnen, weil die Wirksamkeit nichts darüber aussagt, mit welchem Aufwand der Erfolg erreicht wurde, weil es folglich aus der Wirksamkeit allein nicht möglich ist zu entscheiden, ob ein Waffensystem an einer bestimmten Stelle, bei einer bestimmten Aufgabe optimal eingesetzt ist, oder ob es nicht vielmehr woanders besser einzusetzen wäre, weil es mit der Wirksamkeit als alleinigem Kriterium, nicht möglich ist zu entscheiden, ob die vollkommene Erfüllung des Auftrages durch Waffensystem A tatsächlich eher anzustreben ist als die nur teilweise des Waffensystems B.

1.4.1.2. Eigenschaften des Bewertungsmaßstabes

Es muß also ein Bewertungsmaßstab gewählt werden, der den Nutzen einer militärischen Operation bewertet, welcher den Aufwand berücksichtigt, der zur Erreichung dieses Nutzens betrieben werden muß und welcher schließlich in der Lage ist, Aussagen über das Verhältnis von erreichtem Nutzen zu betriebenem Aufwand zu machen.

Wenn derartige Aussagen mit Hilfe des Bewertungsmaßstabes gemacht werden sollen, dann muß dieser die folgenden vier Eigenschaften besitzen 63):

" 1. Gültigkeit: er muß zur Bewertung der wesentlichen Eigenschaften bzw.Fähigkeiten des Systems führen;

2. Eindeutigkeit: er muß eine objektive Aussage sicherstellen, d.h.er muß zu den gleichen Ergebnissen führen, unabhängig davon, von wem er angewendet wird;

3. Berechenbarkeit: er sollte eine quantitative Aussage erlauben;

4. Einfachheit: er sollte übersichtlich sein und eine minimale Anzahl von Rechengrößen beinhalten."

1.4.1.3. Der Bewertungsmaßstab in der Wirtschaftstheorie

Fragen des Nutzens einer Handlung und des mit ihr verbundenen Aufwandes, Fragen des gemeinsamen, Nutzen$ und Aufwand verbindenden Maßstabes sind aus der Produktions- und Kostentheorie bekannt und konnten dort in zufriedenstellender Weise gelöst werden.

---

63) Fischer,D.: Allgemeines zur Durchführung von Operations Research-Studien; Wehrtechnische Monatshefte, vol.65, 1968, S.49 ff und S.127 ff.

Dort ist der Aufwand, der getrieben werden muß, um ein bestimmtes Ziel zu erreichen, der Einsatz bestimmter Mengen von Produktionsfaktoren.

Der Nutzen, der aus diesem Aufwand resultiert, ist der Ertrag, die Ausbringung, das mengenmäßige Produktionsergebnis.

Der Maßstab zur Bewertung der verschiedenen Produktionsmethoden ergibt sich dann aus der Gegenüberstellung von Aufwand und Ertrag, sei es als Differenz, sei es als Quotient.

Um aber zu diesem Maßstab zu gelangen, ist es notwendig, einen gemeinsamen Umrechnungsfaktor für die verschiedenen Produktionsfaktoren zu finden, ist es ferner notwendig, ebenfalls das Produktionsergebnis zu homogenisieren, ist es schließlich, wenn auch nicht zwingend, erforderlich, daß dieser Umrechnungsfaktor für die Input- und die Outputseite derselbe ist.

Die Notwendigkeit des gemeinsamen Umrechnungsfaktors ergibt sich aus der Tatsache, daß nicht ohne zusätzliche Informationen zu entscheiden ist, welches von zwei Produktionsverfahren zur Erstellung eines bestimmten Produktionsergebnisses "besser" ist, wenn Produktionsverfahren 1 a_1 Arbeitsstunden, b_1 Maschinenstunden einer bestimmten Maschine, c_1 Gewichtseinheiten eines bestimmten Werkstoffs verzehrt, wohingegen die entsprechenden Werte für Produktionsverfahren 2 a_2, b_2 und c_2 sind, wobei gelten soll: $a_1 < a_2$, $b_1 > b_2$, $c_1 = c_2$.

Entsprechend besteht Unklarheit, welchem Produktionsergebnis der Vorzug zu geben sei, wenn der Einsatz einer bestimmten Produktionsfaktormengenkombination entweder a_1 Einheiten des Gutes A und b_1 Einheiten des Gutes B oder aber a_2 Einheiten des Gutes A und b_2 Einheiten des Gutes B ergibt, wobei gilt: $a_1 > a_2$ und $b_1 < b_2$.

Wenn jedoch sowohl die Produktionsfaktormengen als auch der mengenmäßige Ausstoß in Geld, z.B.mit ihren Marktpreisen, bewertet werden, kann auf der Input- und der Output-Seite aggregiert werden, ist es möglich, den Gewinn durch Abzug der Kosten vom Erlös zu ermitteln, kann ein Kosten-Wirksamkeits-Quotient berechnet werden, ist mithin der gesuchte Bewertungsmaßstab gefunden, der auch die oben genannten vier Eigenschaften besitzt.

1.4.2. Analoge Anwendung des mikroökonomischen Verfahrens

1.4.2.1. Kostenkurven und Kurven gleicher militärischer Wirksamkeit

Obgleich im militärischen Bereich durch das Fehlen eines Marktmechanismus von vornherein zu vermuten ist, daß annehmbare Definitionen für den Aufwand, die Kosten und für die Wirksamkeit schwierig zu erlangen sein werden [64], obgleich möglicherweise, wenn solche Definitionen gefunden worden sind, die Werte für diese Größen nicht vergleichbar sind, weil der gemeinsame Nenner fehlt [65], soll dennoch zunächst untersucht werden, ob die Lösungen, die in der Wirtschaftstheorie gefunden wurden, übertragbar sind auf die militärischen Verhältnisse. [66]

Wenn für die Produktion und den Einsatz zweier Waffensysteme, die beide geeignet sind, eine bestimmte militärische Aufgabe zu erfüllen, eine bestimmte Summe Geldes zur Verfügung steht,

---

64) Lützow,J.: Anwendungsbereiche ..., op.cit., S.11

65) Fox,P.U.: A Theory of Cost-Effectiveness for Military Systems Analysis; OR, vol.13,1965, S.191 ff.

66) Dieser Versuch ist unternommen worden von Karchere,A. u. Hoeber,F.P.: Combat Problems, Weapon Systems, and the Theory of Allocation; OR,vol.1, 1952/53, S.286 ff; die Darstellung folgt den Ausführungen in diesem Aufsatz.

so kann dieses Geld in unterschiedlicher Weise auf die Produktion und den Einsatz der beiden Waffensysteme aufgeteilt werden, z.B.so, daß von der Waffe 1 eine große, von der Waffe 2 eine geringe Stückzahl hergestellt und eingesetzt wird. Alle Stückzahlkombinationen, die mit dieser Summe möglich sind, können auf einer Kurve versammelt gedacht werden, die beide Achsen eines Koordinatensystems, auf denen die Stückzahlen der beiden Systeme aufgetragen sind, in ihrem positiven Teil schneidet und die vermutlich konkav zum Ursprung oder zumindest linear verläuft. Verschieden hohe verfügbare Summen haben verschiedene "Produktionskurven". Die verschiedenen Produktionskurven sind also Ausdruck für die unterschiedlich hohen Kosten.

Nun ist eine bestimmte Anzahl von Waffen der ersten Art in der Lage, einen ganz bestimmten Effekt zu erzielen, der z.B. in der Vernichtung eines Munitionsdepots von bestimmter Größe innerhalb eines Zeitraumes von x Stunden besteht. Der gleiche militärische Effekt kann aber auch durch eine bestimmte Anzahl von Waffen der zweiten Art oder durch eine Kombination von Waffen beider Arten erreicht werden. Alle Kombinationen, die den gleichen militärischen Effekt besitzen, die die gleiche Wirksamkeit haben, können wiederum zu einer Kurve vereinigt gedacht werden. Da angenommen werden kann, daß sich beide Waffensysteme in ihren Eigenschaften ergänzen, steht zu vermuten, daß diese "Kurven gleicher militärischer Wirksamkeit" konkav zum Ursprung verlaufen [67]. Dort nun, wo eine Produktionskurve eine derartige Isoquante tangiert, dort ist ein optimaler Punkt insofern, als es keine kostengünstigere Kombination der Waffen der beiden betrachteten Arten gibt, die eine höhere oder gleiche Wirksamkeit besitzt, als diejenige, welche durch den Berührungspunkt gegeben ist.

---

67) Walsh, J.E. Inadequacy of Cost per 'Kill' as measure of Effectiveness; OR,vol.5,1957,S.750 ff. weist darauf hin, daß es notwendig ist, zur Beurteilung der Wirksamkeit von Waffensystemen den Effekt der verbundenen Waffen zu berücksichtigen; bei Vernachlässigung dieses Effekts, bei Bewertung eines Waffensystems losgelöst von seiner militärischen Umgebung, sei eine Kostenanalyse zur Ermittlung der Wirksamkeit eine unangemessene Methode.

Die hier vorgestellte Methode läßt sich ohne weitere Schwierigkeiten ausdehnen auf eine beliebige Zahl verschiedener Waffenarten, wodurch dann, mit Hilfe der Grenzrate der Substitution, eine "militärische Minimalkostenkombination" zu bestimmen ist.

1.4.2.2. Verschiedene Wirksamkeitskonzeptionen

Die Bedeutung der Kurven gleicher militärischer Wirksamkeit ist bisher nur für den Fall geklärt worden, daß es sich bei dem zu vernichtenden Ziel um ein weitgehend gleichförmiges Objekt von einer bestimmten Ausdehnung handelt. Die einzelnen Indifferenzkurven unterscheiden sich hier durch die verschieden große Anzahl der zerstörten Quadratmeter Grundfläche oder durch die verschieden hohe Zahl vernichteter Tonnen Munition.

In analoger Weise können die Isoquanten gedeutet werden, wenn das Ziel aus einer Vielzahl homogener Teilziele besteht. Jede Indifferenzkurve entspricht dann einer bestimmten Anzahl vernichteter Teilziele. Der Bewertungsmaßstab für den Einsatz der Waffen ist dann: Kosten je Vernichtung 68)

Besteht jedoch das Ziel aus qualitativ unterschiedenen Einheiten, so muß, um in der bisherigen Weise vorgehen zu können, ein besonderer gemeinsamer Maßstab für die Wirksamkeit der Waffen im Ziel gefunden werden. Dieser Maßstab kann darin bestehen, daß die Wirkung der Waffen im Ziel, der angerichtete Schaden also, in Geld bewertet wird. Es gehen dann die vernichteten oder beschädigten gegnerischen Objekte mit ihren Wiederbeschaffungs- oder Instandsetzungskosten in die Berechnung der Wirksamkeit ein. Die Kurven gleicher militärischer Wirksamkeit sind dann Kurven gleicher Kosten für den Gegner.

---

68) So: Henston,M.C. u.Ogawa,G.: Observations on the Theoretical Basis of Cost-Effectiveness; OR,vol.14,1966, S.242 ff.

Diese Konzeption hat den Vorzug, daß durch die monetäre Bewertung der Wirksamkeit Aufwand und Erfolg unmittelbar in der gleichen Maßeinheit vergleichbar werden. Der Bewertungsmaßstab für den Einsatz der Waffen ist dann: eigene Kosten je Einheit der gegnerischen Kosten.

Mit dieser geldlichen Bewertung des Schadens scheint noch ein weiterer Vorzug verbunden zu sein: Die Instandsetzungs- und Wiederbeschaffungskosten sind insofern ein objektiver Maßstab, als sie unabhängig von subjektiven Wertvorstellungen der eigenen oder der gegnerischen Seite sind. Dieser scheinbare Vorzug ist jedoch ein schwerwiegender Nachteil dieser Methode: es wird durch die Wahl des Geldes als Maßstab unterstellt, daß die Bedeutung und der Wert der vernichteten Objekte sich nach ihren Kosten berechnen. Diese Annahme ist sehr unrealistisch. So ist z.B. die Vernichtung des letzten einsatzbereiten Maschinengewehrs für einen Grenadierzug ein größerer Schaden als die Zerstörung eines Mannschafts-Transportwagens, obgleich dessen Wiederbeschaffung ein Vielfaches von der des MG kostet.

Noch eine andere Eigenschaft dieser Methode engt die Möglichkeiten ihrer Anwendung ein: Eine qualitativ und quantitativ bestimmte Kombination von Waffen fügt dem Gegner einen gewissen Schaden zu. Die Höhe dieses Schadens wird durch eine - und nur eine - Isoquante angegeben. Diese Tatsache läßt zwei Deutungsmöglichkeiten zu: Zum einen kann diese eindeutige Angabe der Wirksamkeit dieser Kombination daraus resultieren, daß der Gegner die bekämpften Objekte so über das Zielgebiet verteilt hat, daß stets der gleiche Effekt erzielt wird. Das ist aber nur dann der Fall, wenn eine wertmäßige Gleichverteilung der Ziele vorliegt. Eine derartige Verteilung ist zwar nicht unmöglich; sie ist aber höchst unwahrscheinlich.

Zum anderen läßt sich diese Tatsache dadurch erklären, daß die Objekte des Gegners zufällig im Zielgebiet verteilt sind, daß den Führungskräften der Waffenkombination nichts über diese Verteilung bekannt und folglich eine Auswahl

der Ziele nach ihrem Wert nicht möglich ist, sondern diese, obgleich von unterschiedlicher Bedeutung, in zufälliger Reihenfolge vernichtet werden. Die Isoquante stellt dann also nicht den mit Sicherheit zu erzielenden Schaden beim Gegner, sondern dessen Erwartungswert dar. Um in diesem Fall die Bedeutung der Isoquante erkennen zu können, bedarf es noch einer Aussage über die Streuung des Schadens. Eine Situation jedoch, bei der über das Zielgebiet keine andere Information als seine Lage im Raum vorliegt, kann zwar gelegentlich bei der Bekämpfung von Erdzielen durch Bomber gegeben sein, im Erdkampf aber widerspricht sie jeder Erfahrung: es liegen stets, wenngleich häufig nur bruchstückhafte Aufklärungs- und Erkundungsergebnisse vor, die helfen, die gegnerischen Objekte im Zielgebiet in der Reihenfolge ihrer Bedeutung zu bekämpfen.

Wenn jedoch angenommen wird, daß derartige Information nicht vorliegt oder, bei Vorliegen, nicht ausgewertet wird, dann ist eine Maximierung des Schadens beim Gegner gemäß der Wertigkeit der Objekte im Zielgebiet nicht möglich.

Dann ist es aber, um einen Bewertungsmaßstab für den Einsatz der Waffen zu erhalten, nicht erforderlich, den angerichteten Schaden in Geld zu bewerten, dann können als Maßstab für die Wirksamkeit quantifizierbare Eigenschaften der Waffen selbst herangezogen werden [69]. Eine derartige Eigenschaft ist z.B. die Fähigkeit, eine bestimmte Menge Sprengstoff in einer Zeiteinheit in das Zielgebiet zu befördern. Der Bewertungsmaßstab ist dann: Kosten je kg Sprengstoff im Zielgebiet. Der Vorzug eines derartigen Vorgehens ist die leichte und zuverlässige Bestimmung der Wirksamkeit.

Zu den Nachteilen aber, die schon die Methode der Bewertung des angerichteten Schadens in Geld aufweist und die auch hier zu finden sind, kommt ein weiterer hinzu:

---

69) So Fields,D.S.: Cost / Effectiveness Analysis: Its Tasks and their Interrelation; OR,vol.14, 1966, S.522 und Abert,J.G.et al., Evaluating Aircraft Requirements in the Light of Varying or Uncertain Mission Mixes; OR,vol.15, 1967, S.738 ff.

Bei Wahl einer quantifizierbaren Waffeneigenschaft als Maßstab für die Wirksamkeit wird die Wirkung der verbundenen Waffen nicht berücksichtigt. Erstreckt sich nämlich die Analyse auf qualitativ unterschiedene Waffen und Waffensysteme, so treten an die Stelle der Qualitätsunterschiede verschiedene Quantitäten der als Maßstab gewählten Eigenschaft; ein Arsenal verschiedenartiger Waffen wird dadurch reduziert auf eine Anzahl gleichartiger Waffen, welche sich voneinander nur durch verschiedene Intensitätsmultiplikatoren unterscheiden. Wenn aber alle Waffen in Bruchteilen oder Vielfachen einer "Einheitswaffe" ausgedrückt werden können, sind sie,in den den Multiplikatoren entsprechenden Quantitäten, voll substituierbar, ohne daß Einbußen oder Gewinne an Wirksamkeit möglich sind, kann es keinen meßbaren Unterstützungseffekt geben.

Durch die gleichzeitige Berücksichtigung mehrerer Leistungsmerkmale ist es möglich, die Realitätsadäquanz dieses Modells zu verbessern. Der erforderliche Rechenaufwand erhöht sich aber mit jeder zusätzlich berücksichtigten Eigenschaft derart, daß die Methode der Bewertung des angerichteten Schadens in Geld vorzuziehen ist.

1.4.2.3. Nicht-zufällige Reihenfolge der Vernichtung der Objekte im Zielgebiet

Wird die Annahme fallengelassen, daß der angerichtete Schaden ein zufällig ausgewählter Wert aus einer Verteilung ist, deren Erwartungswert durch die Isoquante gegeben wird, wird also angenommen, daß Information über das Zielgebiet vorliegt 70), so ist die Analyse in der bisher vorgestellten Form nicht möglich.

---

70) Schreiber,T.S.:Note on the Combat Value of Intelligence and Command and Control Systems;OR,vol.12,1964,S.507 ff. weist auf die kampfentscheidende Bedeutung von Information nachdrücklich hin u.führt aus:"that an increase in the efficiency of an intelligence and command and control system can be equivalent to a substencial increase in numerical strength". (S.507)

Es ist dann notwendig, eine Aussage über den Wert der im Zielgebiet befindlichen Objekte zu machen; es ist dann ferner notwendig, eine Funktion über die Höhe des zu erwartenden Schadens im Zeitablauf zu finden.

Der Wert der im Zielgebiet befindlichen Objekte kann dabei in der beschriebenen Weise, entsprechend den Wiederbeschaffungskosten, in Geld angegeben werden.

Es kann aber auch der Gesamtwert zu einem Ausdruck zusammengefaßt werden. Der Wert der einzelnen Objekte wird dann in Bruchteilen dieses Gesamtwertes gemessen. [71] Dabei kann sowohl der Gesamtwert als auch der Wert der einzelnen Objekte unabhängig von den Wiederbeschaffungskosten, nur entsprechend der Bedeutung der Objekte, bestimmt werden. [72]

Einer derartigen Wertfestsetzung wird stets ein Element der Willkür innewohnen; dieses Maß für die Wirksamkeit erfüllt zweifelsohne nicht die Forderung der Eindeutigkeit (s.o.). Eine so offensichtliche Subjektivität ist aber dem Schein der Objektivität vorzuziehen, wie er erzielt wird, wenn die Objekte im Zielgebiet entsprechend ihrer Bedeutung geordnet und diese Rangziffern als Kardinalzahlen gedeutet werden, deren Reziprokwerte als Maß für den Wert der Objekte dienen. [73]

Neben der Bestimmung des Wertes der im Zielgebiet versammelten Objekte, muß für den Fall des Vorliegens von Information über das Zielgebiet noch die Veränderung des Schadens im Zeitablauf beschrieben werden.

---

71) Day,R.H.:Allocating Weapons to Target Complexes by Means of Nonlinear Programming; OR,vol.14,1966, S.992 ff.

72) Vgl.dazu: Brodheim,E., Herzer,J. u.Russ,L.M.: A General Dynamic Model for Air Defense;OR,vol.15,1967, S.779 ff.

73) Ein derartiges Verfahren verwendet Lemus,F. u.David,K.H.: An Optimum Allocation of Different Weapons to a Target Complex; OR,vol.11,1963, S.793

Der Wert der in einem kleinen Zeitintervall dt vernichteten Objekte ist abhängig von dem zu Beginn dieses Zeitraumes vorhandenen Wert, W(t), von Zahl und Art der Waffen, die diese Objekte zu vernichten suchen, N(t), sowie von deren Vernichtungsfähigkeit A.

Es gilt dann:

$$\frac{dW(t)}{dt} = f(W(t), N(t), A)$$

Da ferner der Wert W(t) eine Funktion der im Zielgebiet zum Zeitpunkt t vorhandenen Objekte M(t) ist:

$$W(t) = f\left[M(t)\right]$$

können für die Bestimmung der Wertverluste im Zeitablauf Derivate von Lanchester-Gleichungen Anwendung finden.

Allerdings darf bei diesem Vorgehen eine Schwierigkeit nicht übersehen werden:

Eine Kostenfunktion stellt eine Beziehung dar zwischen Aufwand und Ertrag. Diese Funktion auf den militärischen Bereich übertragen, stellt eine Beziehung her

- zwischen dem Aufwand des Angreifers, der in den Kosten für Entwicklung, Herstellung und Bereitstellung der Waffen und Waffensysteme besteht
- und dem Ertrag, der gemessen wird an der in dem Zielgebiet angerichteten Zerstörung.

Genauso wenig jedoch, wie die mikroökonomische Kostenfunktion die Rückwirkung des Ertrages auf den Aufwand berücksichtigt, ist diese Kostenfunktion, übertragen auf den militärischen Bereich, in der Lage, die Reaktion des Zieles und deren Auswirkung auf den Angreifer darzustellen.

Anders gesagt: der Beitrag zu den Kosten, der durch die Antwort des Angegriffenen entstehen könnte, findet in diesem Modell in Analogie zur Mikroökonomik keinen Ausdruck, er wird implizit gleich Null gesetzt.

Dies übertragen auf die Lanchester-Gleichungen bedeutet:

$$B = 0 \quad ^{74)}$$

Es folgt hieraus, daß dieses Modell nur in sehr speziellen Fällen anwendbar ist, z.B. bei Raketenangriffen dann, wenn das Opfer des Angriffs über keine entsprechenden Mittel verfügt, um dem Angreifer eine wirkungsvolle Antwort zu geben. Ähnlich liegt der Fall bei Angriffen mit Atomwaffen auf ein Land, welches nicht im Besitz derartiger Waffen ist.

1.4.2.4. Beurteilung der Verwendbarkeit des mikroökonomischen Verfahrens im militärischen Bereich

Was vermag nun die Analyse der Kosten-Wirksamkeit?
Sie gibt mit Sicherheit keinen Anhaltspunkt für den Einsatz der knappen militärischen Mittel für den Fall, daß sich zwei gegnerische Streitkräfte gegenseitig mit dem Ziele der Vernichtung bekämpfen. Dieses Unvermögen resultiert vor allem aus der mangelhaften Kostenfunktion.

---

74) Es wird, da das Modell in Analogie zur Mikroökonomik in der Folge nicht weiter ausgebaut wird, hier nicht untersucht, ob sich, wenn B=0, die Lanchester-Gleichungen noch verwenden lassen, es wird also nicht untersucht, wie sich der Grenzübergang $B \to 0$ gestaltet.

Sie kann aber für den Fall, daß eine Seite gegnerische Objekte bekämpft, die entweder passiv sind oder deren Aktivität sich nicht gegen die sie bedrohenden Waffen und Waffensysteme richtet, angeben, mit welcher Intensität die angreifende Seite diese Vernichtungsaktion betreiben soll, damit die Relation zwischen Aufwand und Ertrag optimal wird.

Doch auch diese Fähigkeit der Kosten-Wirksamkeits-Analyse ist nur von begrenzter Bedeutung. Auf hoher militärischer Führungsebene bestehen zweifellos Möglichkeiten, die Zahl der für eine Aktion zugewiesenen Einheiten entsprechend derartiger Kriterien zu vergrößern oder zu verkleinern. Auf der unteren Führungsebene jedoch ist das Denken in Kosten-Wirksamkeits-Kategorien meist nicht durchzuführen. Ein Kompaniechef wird sich zur Durchführung seines Auftrages seiner ganzen Kompanie bedienen. Er wird nicht auf den Einsatz einiger Gruppen deswegen verzichten, weil dadurch das Optimum der Kosten-Wirksamkeit überschritten wird.

Zweifelsohne will auch dieser Kompaniechef seinen Auftrag mit einem Minimum an Aufwand, d.h. an Verlusten, erreichen. Er sucht aber nicht ein Kriterium der Intensität; diese ist für ihn von vornherein durch seine verfügbaren Mittel gegeben. Er sucht vielmehr eine Richtlinie für sein Handeln, er sucht die Taktik, die ihm, bei gegebener Wirksamkeit (=Auftragserfüllung) seine Kosten (= Verluste) minimiert.

Wenn die Kosten, da das Ziel dem Angreifer gegenüber passiv, gleich Null sind, wird die Vernichtungsaktion mit allen verfügbaren Kräften geführt.

Der Versuch, Kriterien für den optimalen Einsatz von Streitkräften auch auf unterer Führungsebene mit Hilfe der Erkenntnisse der Produktions- und Kostentheorie zu gewinnen, muß als gescheitert angesehen werden. [75]

---

75) Danskin, J.M.: Combat Problems, Weapons Systems and the Theory of Allocation; OR, vol. 2 1954, S. 205, bezweifelt überhaupt die Eignung der Werkzeuge der klassischen ökonomischen Theorie für die Lösung militärischer Einsatzprobleme.

1.4.3. Lineare Optimierung

1.4.3.1. Grundsätzliche Wertprobleme

Die Analyse in Analogie zur Mikroökonomik gilt, wegen der speziellen Form der Verlustfunktion, nur, wenn Kampfsituationen der folgenden Art beschrieben werden:

$$M(t) \neq M(0)$$
$$N(t) = N(0)$$

oder

$$M(t) = M(0)$$
$$N(t) \neq N(0) .$$

Treten aber auf beiden Seiten Verluste auf, so müssen für beide Seiten Verlustfunktionen aufgestellt werden, d.h. Funktionen, die Aussagen über den Wert der im Laufe des Kampfes verlorengegangenen Einheiten machen.

Hierbei ist es nun nicht gleichgültig, von welcher Seite aus man die Verluste einer bestimmten Streitkraft betrachtet:

Sind die Verluste beim Gegner aufgetreten, so ist es möglich, gleich, ob es sich um Verluste an Menschen oder um Verluste an Waffen und Material oder um Verluste an beiden handelt, diese in der oben beschriebenen Weise zu erfassen; es ist hierbei nur, je nach Wahl des Maßstabes für den Erfolg, von Bedeutung, welche Wiederbeschaffungskosten, welche Verluste an Kampfkraft o.ä. dem Gegner zugefügt worden sind.

Bei Verlusten der eigenen Streitkraft jedoch muß bei der Bewertung der Verluste der Faktor Mensch gesondert berücksichtigt werden, denn es ist z.B. unrichtig, den Verlust einer Infanterie-Kompanie von 160 Mann dem Verlust eines Kampfpanzers mit einer Besatzung von vier

Mann gleichzusetzen, wenn die Grenadiere nur mit leichten Waffen ausgerüstet sind und deren Wiederbeschaffungskosten die gleichen sind wie die eines Kampfpanzers.

Es ist aber zweifelsohne auch unrichtig, dem Verlust dieser Kompanie die gleiche Bedeutung beizumessen wie dem Verlust von 40 Kampfpanzern, obgleich hierbei die Zahl der Menschenverluste die gleiche ist. Diese Überlegung wäre nur dann richtig, würde man sich beziehen auf die Wertvorstellung der einzelnen Individuen. Bezieht man sich jedoch auf die Wertvorstellung der Gesellschaft, welche den Krieg führt, so wird dort dem Überleben des Gemeinwesens ein höherer Wert zuerkannt als dem Überleben des Einzelnen [76].

Einen Weg aus diesem Dilemma gibt es auf der unteren militärischen Führungsebene. Ist die zu analysierende Streitkraft der eigenen Seite in sich homogen, so ist das Bestreben der Führung darauf gerichtet, die Zahl der verlorenen Einheiten so klein zu halten wie möglich. Das Bestreben der einzelnen im Kampf befindlichen Individuen ist aber darauf gerichtet zu überleben. Hier besteht also eine Identität in den Zielen auf verschiedenen Ebenen, hier kann eine verbindliche Zielfunktion angegeben, hier kann der Einsatz der verfügbaren Streitkräfte optimiert werden.

1.4.3.2. Die Bestimmung des Optimums

Eine Streitkraft Rot, bestehend aus N(0) Einheiten, steht im Kampf mit einer Streitkraft Blau, die aus zwei in sich homogenen, voneinander aber durch verschiedene Kampfwerte ihrer Einheiten unterschiedenen Gruppen mit den Stärken $M_1(0)$ und $M_2(0)$ besteht. Die Führung von Rot steht vor der Frage, wie die N Einheiten aufgeteilt werden sollen, damit ihr Einsatz optimal ist. Das Ergebnis, die Wirksamkeit des Einsatzes der roten Einheiten, wird in vernichteten Einheiten der beiden Gruppen des Gegners gemessen.

---

76) Diese Problematik und verwandte Probleme sind ausführlich behandelt worden von:
Smith jr.,N.M. et al.: The Theory of Value and the Science of Decision - A Summary; OR, vol.1, 1953, S.103ff
Smith jr.,N.M.: A Calculus for Ethics: A Theory of the Structure of Value; Behavioral Science, vol.1, 1956, S. 133 ff

Der Teil der Streitkraft Rot, der gegen $M_1(0)$ eingesetzt wird, sei $N_1(0)$; entsprechend ist der Teil, der $M_2(0)$ bekämpft $N_2(0)$. Es soll gelten:

$$N = N_1 + N_2 \tag{73}$$

Die Kampfaktionen einer Gruppe von Blau richten sich gegen den Teil von Rot, der ihr unmittelbar gegenübersteht. Die Kampfaktionen des Teiles von Rot, die den Auftrag haben, eine bestimmte Gruppe von Blau zu bekämpfen, richten sich nur gegen diese.

Ist nun:

$$M(t) = M(0)\cosh\sqrt{AB}\,t - \sqrt{A/B}\,N(0)\sinh\sqrt{AB}\,t$$

so gilt unter den getroffenen Annahmen:

$$M_1(t) = M_1(0)\cosh\sqrt{A_1B_1}\,t - \sqrt{A_1/B_1}\,N_1(0)\sinh\sqrt{A_1B_1}\,t \tag{74}$$

wobei: A_1 = Kampfwert einer Einheit von Rot, bezogen auf die 1.Gruppe von Blau

B_1 = Kampfwert einer Einheit aus der 1.blauen Gruppe.

Entsprechend ist $M_2(t)$ definiert.

Der Erwartungswert für die Anzahl der im Zeitraum 0 bis t vernichteten Einheiten der 1.Gruppe von Blau ist:

$$\alpha_1 = M_1(0) - M_1(t) \tag{75}$$

Aus der Definition für α_1 und $M_1(t)$ folgt:

$$\alpha_1 = M_1(0)\left\{1 - \left[\cosh\sqrt{A_1 B_1}\,t - \sqrt{\frac{A_1}{B_1}}\,\frac{N_1(0)}{M_1(0)}\sinh\sqrt{A_1 B_1}\,t\right]\right\}$$

$$= N_1(0)\sqrt{A_1/B_1}\sinh\sqrt{A_1 B_1}\,t + M_1(0)\left[1 - \cosh\sqrt{A_1 B_1}\,t\right] \quad (76)$$

Wenn nun ein Zeitpunkt bestimmt wird, an dem für alternative $N_1(0)$ die α_1 berechnet werden sollen, dann kann statt dessen vereinfachend geschrieben werden:

$$\alpha_1 = a\,N_1(0) + b \quad (77a)$$

wobei: $\sqrt{A_1/B_1}\sinh\sqrt{A_1 B_1}\,t = a = \text{const.}$

$$M_1(0)\left[1 - \cosh\sqrt{A_1 B_1}\,t\right] = b = \text{const.}$$

Entsprechend gilt:

$$\alpha_2 = c\,N_2(0) + d \quad (77b)$$

wobei: $\sqrt{A_2/B_2}\sinh\sqrt{A_2 B_2}\,t = c = \text{const.}$

$$M_2(0)\left[1 - \cosh\sqrt{A_2 B_2}\,t\right] = d = \text{const.}$$

Da aber $N = N_1 + N_2$ für jeden beliebigen Zeitpunkt, also auch für den Zeitpunkt 0 gilt, kann $N_2(0)$ ersetzt werden

$$\alpha_2 = c\left[N(0) - N_1(0)\right] + d\,.$$

Durch Auflösen beider Gleichungen nach $N_1(0)$ und Gleichsetzen

erhält man die "Produktionsfunktion":

$$\alpha_1 = -\frac{a}{c}\,\alpha_2 + \frac{ac\,N(0) + ad + cb}{c}$$

oder in vereinfachter Schreibweise:

$$\alpha_1 = -\varphi\alpha_2 + \lambda \qquad (78)$$

wobei: $\varphi = \frac{a}{c} = \text{const.}$

$\lambda = \frac{ac\,N(0) + ad + cb}{c} = \text{const.}$, da N(0) vorgegeben.

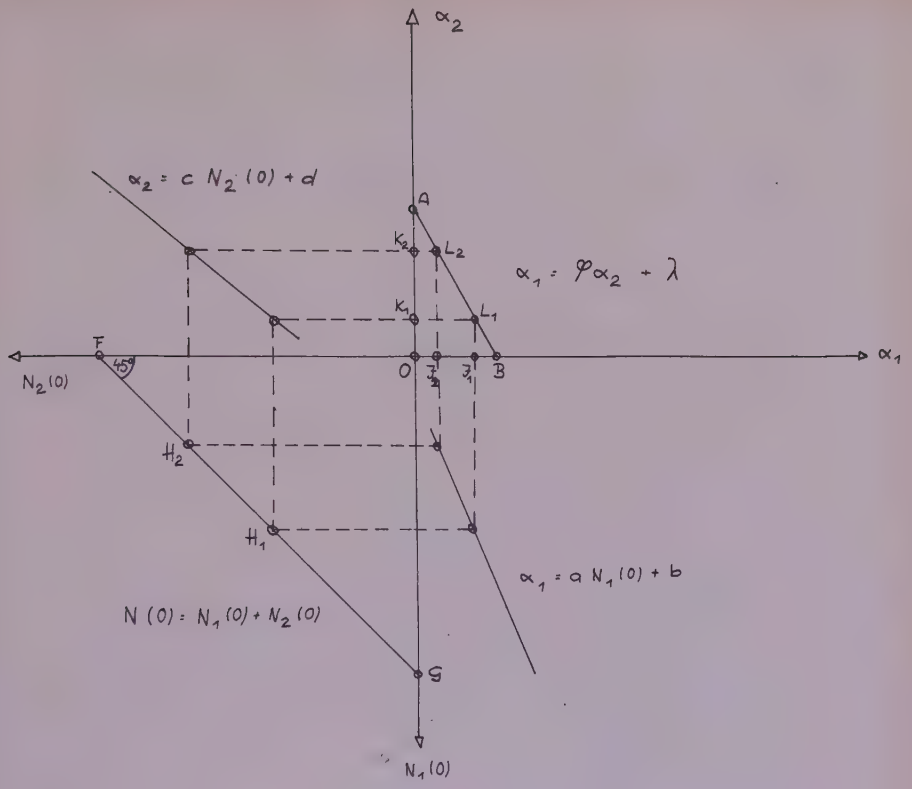

Fig.3: Herleitung der "Produktionsfunktion"

Es ist $N(0) = N_1(0) + N_2(0)$. Da nun in der Figur 3 $\overline{FO} = \overline{GO} = N(0)$, stellt jeder Punkt auf der Strecke FG eine mögliche Aufteilung der Streitkraft N(0) in zwei Gruppen $N_1(0)$ und $N_2(0)$ dar, so auch z.B. Pkt H_1 und Pkt H_2.

Über Gl.(77) ist $N_1(0)$ mit α_1 und $N_2(0)$ mit α_2 verbunden, d.h. einem bestimmten Wert von $N_1(0)$ entspricht ein bestimmter Wert von α_1; die Beziehung zwischen $N_2(0)$ und α_2 ist entsprechend. So entspricht z.B. der Stärke von $N_1(0)$, die durch den Punkt H_1 bezeichnet

ist, ein ganz bestimmter Verlust α_1, in der Fig.3: $\overline{OI}_1$, und der Stärke von $N_2(0)$ [= $N(0) - N_1(0)$], die durch den Punkt H_1 bezeichnet ist, ein ganz bestimmter Verlust α_2, in der Figur $\overline{OK}_1$. Entsprechendes läßt sich über die durch den Punkt H_2 gegebene Aufteilung von N(0) sagen.

α_1 und α_2 sind aber die beiden Veränderlichen von Gl.(78). Jedem Wert von α_1 ist mithin ein ganz bestimmter Wert von α_2 zugeordnet. L_1 und L_2 sind zwei derartige Verlustkombinationen. Alle unter den gemachten Annahmen maximal erreichbaren Verlustkombinationen befinden sich auf der Strecke AB. Alle anderen möglichen, nicht maximalen Verlustkombinationen (α_1, α_2) liegen im Dreieck OAB, jedoch unterhalb von $\overline{AB}$, so daß alle möglichen Verlustkombinationen im Dreieck OAB versammelt sind.

Nun kann jedoch der Verlust, den eine Gruppe von Blau im Laufe des Kampfes erleidet, nicht größer werden als ihre Anfangsstärke. Folglich muß gelten:

$$\alpha_1 \leq M_1(0) \qquad (79a)$$

$$\alpha_2 \leq M_2(0) \qquad (79b) .$$

Sind die Werte für $M_1(0)$ und $M_2(0)$ bekannt, so können die beiden Ungleichungen in der Darstellung berücksichtigt werden:

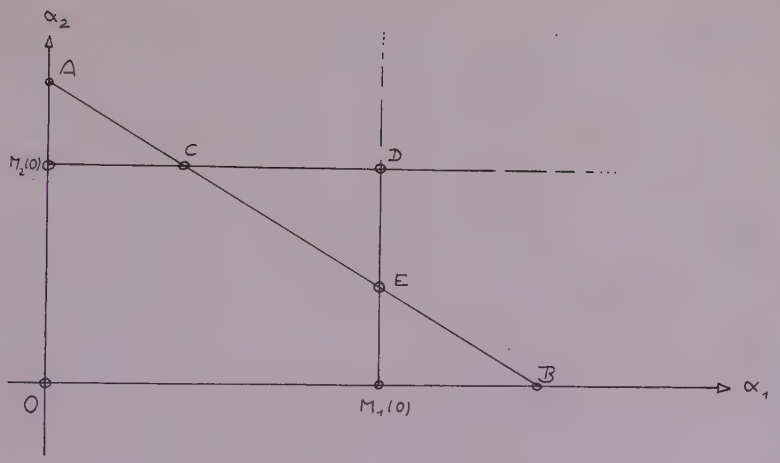

Fig.4: Restriktionen gemäß Gl.(79)

Innerhalb des Rechtecks 0 $M_2(0)$ D $M_1(0)$ liegen alle denkbaren Verluste von M bei gegebenen $M_1(0)$ und $M_2(0)$. Da jedoch, wie auch immer die Streitkraft N(0) aufgeteilt wird, ihre Kampfkraft nicht ausreicht, eine Verlustkombination innerhalb des Dreiecks CDE, oberhalb von $\overline{AB}$ zu erreichen, da ferner, gem, Gl.(79), auch die Verlustkombinationen innerhalb der Dreiecke $M_2(0)$AC bzw. $M_1(0)$EB, jenseits von $\overline{M_2(0)C}$ bzw. $\overline{M_1(0)E}$, nicht realisiert werden können, enthält der Bereich 0 $M_2(0)$ C E $M_1(0)$ alle unter den gemachten Voraussetzungen zulässigen Verlustkombinationen (α_1, α_2). In diesem Bereich muß das Wertepaar gesucht werden, welches den Gewinn für Rot maximiert.

Nun ist, gem. Gl.(9):

$$N_1(t) = N_1(0) \sinh\sqrt{A_1 B_1}\, t - \sqrt{B_1/A_1}\, M_1(0) \cosh\sqrt{A_1 B_1}\, t$$

$$N_2(t) = N_2(0) \sinh\sqrt{A_2 B_2}\, t - \sqrt{B_2/A_2}\, M_2(0) \cosh\sqrt{A_2 B_2}\, t$$

und gem. Gl.(73):

$$N(0) = N_1(0) + N_2(0)$$

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Daraus folgt:

$$N_1(t) = N_1(0) \sinh \sqrt{A_1 B_1}\, t - \sqrt{B_1/A_1}\, M_1(0) \cosh \sqrt{A_1 B_1}\, t$$

$$N(t) - N_1(t) = \left[N(0) - N_1(0)\right] \sinh \sqrt{A_1 B_1}\, t - \sqrt{B_2/A_2}\, M_2(0) \cosh \sqrt{A_2 B_2}\, t$$

und:

$$\begin{aligned} N(t) = {} & N_1(0) \sinh \sqrt{A_1 B_1}\, t \\ & + \left[N(0) - N_1(0)\right] \sinh \sqrt{A_2 B_2}\, t \\ & - \sqrt{B_1/A_1}\, M_1(0) \cosh \sqrt{A_1 B_1}\, t \\ & - \sqrt{B_2/A_2}\, M_2(0) \cosh \sqrt{A_2 B_2}\, t \end{aligned} \qquad (80)$$

oder:

$$\begin{aligned} N(t) = {} & N_1(0) \left(\sinh \sqrt{A_1 B_1}\, t - \sinh \sqrt{A_2 B_2}\, t\right) \\ & + N(0) \sinh \sqrt{A_2 B_2}\, t \\ & - \sqrt{B_1/A_1}\, M_1(0) \cosh \sqrt{A_1 B_1}\, t \\ & - \sqrt{B_2/A_2}\, M_2(0) \cosh \sqrt{A_2 B_2}\, t \end{aligned} \qquad (81)$$

Da t ein bestimmter, zunächst willkürlich festgesetzter Wert ist, da N(0), $M_1(0)$, $M_2(0)$, die A und die B vorgegeben sind, kann statt Gl.(81) geschrieben werden:

$$N(t) = g\,N_1(0) + h \qquad (82)$$

wobei:

$$g = \sinh\sqrt{A_1 B_1}\,t - \sinh\sqrt{A_2 B_2}\,t$$

$$h = N(0)\sinh\sqrt{A_2 B_2}\,t - \sqrt{B_1/A_1}\,M_1(0)\cosh\sqrt{A_1 B_1}\,t - \sqrt{B_2/A_2}\,M_2(0)\cosh\sqrt{A_2 B_2}\,t$$

Diese Gleichung ist nur definiert innerhalb der Grenzen $N_1(0) = 0$ und $N_1(0) = N(0)$, also für:

$$0 \leq N_1(0) \leq N(0) \qquad (83)$$

da, bei Aufteilung von N(0), $N_1(0)$ nicht größer als das Ganze werden, aber auch keine negativen Werte annehmen kann.

Ziel ist es nun, für den Zeitpunkt t die Stärke N(t) zu maximieren.

Es folgt aus Gl.(82) sofort, daß, wenn $g \neq 0$, das Maximum dieser Funktion auf einer ihrer Grenzen liegen muß, wobei sich die Frage, welche Grenze dies sei, beantwortet aus dem Vorzeichen von g.

Die Folgerung für den Einsatz der Kräfte aus dieser Erkenntnis ist: eine Aufteilung, eine Zersplitterung der Kräfte sollte im Interesse des Minimierens der eigenen Verluste nicht erfolgen, vielmehr sollten sich alle Kräfte zunächst vereint gegen eine gegnerische Gruppe wenden.

Ist nun t nicht ein beliebiger Zeitpunkt, sondern der Zeitpunkt, bis zu dem eine Gruppe von Blau, z.B. die erste Gruppe, vernichtet sein muß, besitzt außerdem Rot in dieser Lage so starke Kräfte, daß es bei ihrer Konzentration auf eine Gruppe von Blau bis zum Zeitpunkt t mehr als die vorhandenen Kräfte vernichtet haben könnte, dann sollte, trotz der oben angestellten Überlegungen, Rot seine Kräfte teilen und zwar so, daß die eine Gruppe noch genau so stark ist, daß sie in der vorgegebenen Zeit die eine, im Beispiel: die erste Gruppe von Blau vernichten kann; die Streitkraft Rot sollte sich also so teilen, daß die Verlustkombination von Blau der durch C oder E (Fig.4) beschriebenen entspricht, wobei die Entscheidung zugunsten von C oder zugunsten von E getroffen wird gemäß der Größe von g, also bestimmt wird durch die gruppenbezogenen Kampfwerte A_1, A_2, B_1 und B_2.

Geht Rot so vor, wird es zwar Verluste erleiden, die größer sind, als wenn es sich mit ungeteilten Kräften zunächst gegen die erste Gruppe wendet, um dann anschliessend den Kampf gegen die zweite Gruppe aufzunehmen. Da aber die Annahme, die zweite, anfänglich noch nicht angegriffene Gruppe von Blau sehe tatenlos zu, wie die erste Gruppe von Blau vernichtet wird, und warte darauf, daß sie anschließend das gleiche Schicksal erleide, im höchsten Grade unrealistisch ist, da vielmehr die zweite Gruppe von Blau der ersten, von der gesamten Streitkraft von Rot bedrängten Gruppe zu Hilfe eilen wird; da Rot somit Gefahr läuft, in einen allgemeinen Kampf verwickelt zu werden und jeglichen Vorteil des Nacheinander-Bekämpfens zu verlieren droht, sollte der Teil von Rot, der nicht benötigt wird, um in der vorgesehenen Zeit die erste Gruppe von Blau zu vernichten, die zweite Gruppe von Blau so lange binden, bis der andere Teil von Rot seinen ersten Auftrag durchgeführt hat und sich anschliessend mit dem ersten Teil von Rot vereinigen kann, um nunmehr auch die zweite Gruppe von Blau zu vernichten.

1.4.3.3. Suboptimum und Ausweitung der Anwendungsmöglichkeiten

Das vorgestellte Verfahren bezieht sich bisher auf den Kampf einer homogenen Streitkraft gegen eine andere Streitkraft, welche aus zwei verschiedenen Gruppen zusammengesetzt ist.

Ohne das Verfahren grundsätzlich ändern zu müssen, kann es ausgedehnt werden auf den Fall, daß die gegnerische Streitkraft aus n verschiedenen Gruppen besteht. Eine graphische Lösung ist dann nicht mehr möglich; die Berechnung der optimalen Aufteilung der eigenen Einheiten auf die verschiedenen gegnerischen Gruppen, muß dann mit einem der zu diesem Zweck entwickelten Lösungsverfahren, z.B. der Simplexmethode, erfolgen. 77)

Es muß jedoch nochmals herausgestellt werden, daß auf diese Weise stets nur ein Optimum für eine bestimmte, in sich homogene Gruppe ermittelt werden kann. Dieses Optimum ist ein Suboptimum in dem Sinne, als es möglich ist, daß die errechnete Lösung auf einem höheren Aggregationsniveau durchaus keine optimalen Eigenschaften zu besitzen braucht. 78) Das ist so zu verstehen, daß es zwar auf der Ebene der Führung der homogenen Gruppe keine bessere Lösung gibt, daß aber die nächsthöhere Führung, welche zur Erfüllung dieses

---

77) Vgl.dazu Dantzig,G.B.: Lineare Programmierung u.Erweiterungen;Berlin,Heidelberg,New York,insbes.S.68 ff. u. 11o ff.
Henn,R.u.Künzi,H.P.:Einführung in die Unternehmensforschung,vol.II,Berlin,Heidelberg,New York,1968, insbes. S.8 ff.
Collatz,L.u.Wetterling,W.:Optimierungsaufgaben; Berlin, Heidelberg,New York,1966, insbes.S.25 ff.

78) Zum Problem des Suboptimums s.Hitch,C.: Sub-Optimization in Operations Problems; OR,vol.1, 1952/53, S.87 ff.; übersetzt von: ÜDBw Nr.66/15986.

Auftrages wählen kann zwischen dem Einsatz verschiedener, sich durch den Kampfwert ihrer Einheiten unterscheidender Gruppen, die Verluste, welche eine andere Gruppe bei dieser Aktion erleiden würde, niedriger veranschlagt.

Aus dem Fehlen einer gemeinsamen, allgemein anerkannten Wertfunktion für eine aus verschiedenartigen Gruppen bestehende eigene Streitkraft resultiert, daß das entwickelte Verfahren nicht dem Truppenführer die Entscheidung darüber abnehmen kann, wie er seine in sich heterogene Streitkraft einsetzen soll.

Durch Angabe der mindestens zu erwartenden Verluste, die eine derartige Gruppe bei Durchführung eines Auftrages erleiden würde, sind dem Truppenführer jedoch Hilfen an die Hand gegeben, die ihm ermöglichen, die Entscheidung weitgehend zu einer vernünftigen werden zu lassen. Die Entscheidung aber muß er in eigener Verantwortung selber treffen.

Das Fehlen einer derartigen, heterogene Einheiten verbindenden Zielfunktion ist vermutlich auch der Grund, weshalb Versuche, Methoden des linearen Optimierens auf Kampfgeschehen anzuwenden, bisher nicht bekannt geworden sind, weshalb sich solche Arbeiten bisher auf die Situation beschränken, in welcher eine Streitkraft Ziele zu vernichten sucht, die sich dieser Streitkraft gegenüber passiv verhalten. 79)

---

79) Manne, A.S.: A Target-Assignment Problem; OR,vol.6, 1958, S.346 ff.
Ash,M.: Flood's Assignment Model for Small Kill Levels; OR,vol.7,1959, S.258 ff
Den Broeder jr.G.G. et al.: On Optimum Target Assignments; OR,vol.7, 1959, S.322 ff.

2. Die Theorie der stochastischen Duelle

2.1. Gegenüberstellung von Abnutzungstheorie und Theorie der stochastischen Duelle

Bei den Kampfmodellen, die in Anlehnung an die Lanchester-Gleichungen entwickelt werden, besteht die grundsätzliche Konzeption darin, daß eine aus mehreren Einheiten bestehende Streitkraft auf eine andere, ebenfalls aus mehreren Einheiten bestehende Streitkraft trifft, daß diese Streitkräfte sich gegenseitig bekämpfen mit dem Ziele der Vernichtung, und daß beide Streitkräfte Verluste erleiden, die durch die jeweils gegnerische Streitkraft bewirkt werden. Diese Verluste erfolgen im Laufe der Zeit und führen an einem bestimmbaren erwarteten Zeitpunkt dazu, daß mindestens eine der beiden Streitkräfte über keine Einheiten verfügt, daß sie sich also im Kampf mit dem Gegner völlig aufgebraucht, abgenutzt hat.

Bei der Beschreibung dieses Abnutzungsvorganges stützen sich diese Modelle auf Kampfwerte, die durchschnittlichen Charakter haben. Es wird also von vornherein ausgegangen von einer Vielheit von Einheiten auf beiden Seiten.

Ein anderer Weg ist beschritten worden mit der Theorie der stochastischen Duelle [80].

Ausgehend von Analysen der Wirksamkeit von Waffensystemen, ausgehend auch von der Analyse des Kampfes zwischen kleinen Gruppen, wurde ein elementares Modell entwickelt, welches geeignet ist, als Baustein für größere Modelle zu dienen [81].

---

80) Eine Gegenüberstellung der Abnutzungstheorie und der Theorie der stochastischen Duelle in allereinfachster Form findet sich bei
Dathe,: Einführung ..., op.cit., S.14

81) Ancker,C.J.jr.: The Status Developments in the Theory of Stochastic Duels; OR, vol.15,1967, S.389

Das Vorgehen dabei ist, grob skizziert, das folgende:

Der Kampf wird reduziert auf ein Duell zwischen zwei Kämpfenden; von dort aus wird das Modell durch schrittweise Vergrößerung des Modellumfanges den komplexeren Situationen angepaßt.

2.2. Das fundamentale Duell

2.2.1. Das fundamentale Duell mit konstanten Zeitintervallen zwischen den einzelnen Schüssen

2.2.1.1. Gleiche Intervalle für beide Seiten

Zwei Duellanten, A und B, bekämpfen einander, indem sie sich solange beschießen, bis einer vernichtet ist.

Jeder abgegebene Schuß hat eine bestimmte, von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit, daß er den Gegner trifft und damit vernichtet.

Sowohl A als auch B haben einen unendlich großen Munitionsvorrat, so daß die Vernichtung eines Teilnehmers am Duell mit Sicherheit eintrifft, wenn auch möglicherweise zu einem weit in der Zukunft liegenden Zeitpunkt.

Die Zeit zwischen zwei Schüssen von A sei konstant a, für B dann entsprechend b. Die Flugzeit des Geschosses wird vernachlässigt und gleich Null gesetzt 82). Beginnt A das Duell durch Abgabe eines Schusses auf B zum Zeitpunkt 0, erwidert B das Feuer nach Ablauf einer Frist von T ($T < a$); ist schließlich a = b, so wird A nach Ablauf einer bestimmten Zeit t ($T < t < T+a$) noch leben, wenn eines der beiden folgenden, sich gegenseitig ausschließenden, die Möglichkeiten erschöpfenden Ereignisse eintritt:

---

82) Die Darstellung des fundamentalen Duells mit konstanten Zeitintervallen a und b, wobei a=b, folgt im wesentlichen
Schoderbek,J.J., I, op.cit.

Ereignis (1): B schießt nicht
Ereignis (2): B schießt einmal und trifft nicht.

Ereignis (1) tritt dann ein, wenn B durch den ersten Schuß von A vernichtet, Ereignis (2), wenn B durch den ersten Schuß von A nicht vernichtet wird.

Ist nun p_A die Vernichtungswahrscheinlichkeit eines Schusses von A, p_B entsprechend, mit den komplementären Ueberlebenswahrscheinlichkeiten q_A und q_B, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis (1) eintritt:

$$P\ [\text{Ereignis (1)}] = p_A ,$$

daß das Ereignis (2) eintritt:

$$P\ [\text{Ereignis (2)}] = q_A\, q_B .$$

Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit, daß A nach Ablauf der Zeit t noch nicht vernichtet ist,

$$P\ [A(t)] = p_A + q_A\, q_B \qquad T < t < a + T$$

Gilt $a + T < t < 2a + T$, so kann B zweimal schießen, wenn es den ersten und den zweiten Schuß von A überlebt.

A wird nach der Zeit t noch nicht vernichtet sein, wenn eines der drei folgenden Ereignisse eintritt:

Ereignis (1): B schießt nicht,
Ereignis (2): B schießt einmal und trifft nicht,
Ereignis (3): B schießt zweimal und trifft nicht.

Ereignis (1) tritt dann ein, wenn B durch den ersten Schuß vernichtet wird; folglich:

$$P\ [\text{Ereignis (1)}] = p_A$$

Ereignis (2) tritt dann ein, wenn B den ersten Schuß von A überlebt, selber fehlt und dann durch den zweiten Schuß vernichtet wird; folglich:

$$P\ [\text{Ereignis (2)}] = q_A\, q_B\, p_A$$

Ereignis (3) tritt dann ein, wenn B den ersten und zweiten Schuß von A überlebt, selber aber auch zweimal fehlt:

$$P\ [\text{Ereignis (3)}] = q_A^{\,2}\, q_B^{\,2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß A nach Ablauf der Zeit t noch nicht vernichtet ist, ergibt sich dann wie folgt:

$$P\ [A(t)] = p_A + q_A\, q_B\, p_A + q_A^{\,2}\, q_B^{\,2} \quad \text{für}$$

$$\text{für } a + T < t < 2a + T$$

Unter den Voraussetzungen, daß a = b, und daß $a > T$, folgt dann für eine beliebige Zahl von geschossenen Runden k die Wahrscheinlichkeit, daß A nach Ablauf von t noch nicht vernichtet ist:

$$P\,[A(t)] = p_A + q_A q_B p_A + \cdots + (q_A q_B)^{k-1} p_A + (q_A q_B)^{k}$$

$$\text{für } (k-1)a + T < t < ka + T \qquad (84a)$$

Für den Duellanten B ergibt sich entsprechend die folgende Überlebenswahrscheinlichkeit nach Ablauf von t:

$$P\,[B(t)] = q_A\,[p_B + q_A q_B p_B + \cdots + (q_A q_B)^{k-2} p_B + (q_A q_B)^{k-1}] \qquad (84b)$$

Geht $t \to \infty$, so ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\lim_{t \to \infty} P\,[A(t)] = P\,[A(\infty)] = \frac{p_A}{1 - q_A q_B} \qquad (85a)$$

und:

$$\lim_{t \to \infty} P[B(t)] = P[B(\infty)] = \frac{q_A p_B}{1 - q_A q_B} \qquad (85b)$$

Dabei ist dann:

$$P[A(\infty)] + P[B(\infty)] = 1 \qquad (86)$$

P [A(∞)] und P [B(∞)] sind die Wahrscheinlichkeiten, daß A bzw.B Sieger des Duells wird.

2.2.1.2. Verschieden große Intervalle für beide Seiten

Die wenig realistische Annahme, daß die konstanten Zeitintervalle zwischen den einzelnen Schüssen für beide Duellanten gleich sind, wird nun ersetzt durch die Annahme: $a \neq b$. [83]

Um das Duell mit dem j-ten Schuß zu seinen Gunsten zu entscheiden, muß A die ersten j - 1 Schüsse vorbei schießen und B dann mit dem j-ten Schuß vernichten, wohingegen B mit seinen ersten k Schüssen keinen Treffer anbringt, wobei:

$$k = \left[j \frac{a}{b}\right]$$

$\left[j \frac{a}{b}\right]$ = größte ganze Zahl kleiner oder gleich $j \frac{a}{b}$.

Die Siegeswahrscheinlichkeit für A ist dann:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} p_A \, q_A^{j-1} \, q_B^{k}$$

---

83) Vgl. dazu: Ancker jr., C.J. und Williams, T.: Some Discrete Processes in the Theory of Stochastic Duels; OR, vol. 13, 1965, S. 202 ff.

$$= p_A \sum_{j=1}^{\infty} q_A^{j-1} \, q_B^{[j\,a/b]} \qquad (87a)$$

Entsprechend gilt für B:

$$P(B) = p_B \sum_{k=1}^{\infty} q_B^{k-1} \, q_A^{[k\,b/a]} \qquad (87b)$$

2.2.2. Das fundamentale Duell mit zufällig verteilten Zeitintervallen zwischen den einzelnen Schüssen [84]

Wird die Annahme der stets gleichbleibenden Intervalle zwischen den einzelnen Schüssen fallengelassen zugunsten der realistischeren Annahme, daß die Zahl der Schüsse, die von den Duellanten in einer Zeit von der Dauer t abgegeben werden, zufällig verteilt sind, dann kann eine Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeiten nicht mehr wie im vorigen Fall durchgeführt werden.

Zunächst muß eine Annahme über die Verteilung der Anzahl der Schüsse, die während der Zeit t abgefeuert werden können, getroffen werden [85].

Es kann festgestellt werden, daß diese Verteilung eine Verteilung diskreter Art sein muß, da die Schüsse kein Kontinuum darstellen, sondern jeder Schuß von den vorhergehenden und den nachfolgenden Schüssen klar zu unterscheiden ist als ein in sich abgeschlossenes Ereignis.

Um zu einer bestimmten Verteilung diskreter Art zu gelangen, sei auf drei Eigenschaften, die jedem der Schüsse zu eigen sind, hingewiesen:

---

84) Vgl.dazu: Williams,T. u.Ancker,C.J.jr.: Stochastic Duels; OR,vol.11,1963,S.8o4 ff
Schoderbek,J.J.: Some Weapon System Survival Probability Models - II. Random Time Between Firings;OR,vol.1o,1962 S.168 ff.
Dathe,: Einführung ..., op.cit.,S.14 ff.

85) Vgl. zu den folgenden Ausführungen: Menges,G.: Grundriß der Statistik - Teil 1:Theorie; Köln, Opladen 1968, S.226f,232

(1) durch jeden Schuß wird nur eines von zwei möglichen Ereignissen realisiert: er trifft oder er trifft nicht (Prinzip der Zweipunktverteilung);

(2) von allen Schüssen, die einer der beiden Duellanten abgibt, wird angenommen, daß sie die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit haben (Konstanz des Bernoulli-Parameters);

(3) es wird schließlich angenommen, daß jeder Schuß stochastisch unabhängig ist von den vorhergehenden und nachfolgenden Schüssen ("Ziehung mit Zurücklegen").

Ist nun die Munitionsmenge begrenzt, ist damit die "Anzahl der Versuche fest", dann ist damit die Voraussetzung für die Anwendung der Binomialverteilung gegeben.

Da aber angenommen wird, daß beide Seiten einen unendlich großen Munitionsvorrat haben (s.o. S.104), da also die Anzahl der Schüsse nicht konstant vorgegeben wird, mithin "beliebig viele Versuche ausgeführt" werden können, sind damit die Voraussetzungen für die Anwendung der geometrischen Verteilung gegeben [86].

Da davon ausgegangen werden kann, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer sehr gering ist [87], da folglich, neben $n \to \infty$, auch $p \to 0$ und $np = const.$, kann das Poisson-Modell zur Anwendung kommen, ein Weg, der in der Literatur [88] auch bei diesem Problem relativ häufig beschritten wird, sicherlich nicht zuletzt wegen der Eleganz dieser Lösung.

---

86) Ancker, C.J., jr.: Stochastic Duels with Limited Ammunition Supply; OR vol 12,1964, S.43 wendet sie an

87) Berechnungen aufgrund der Verlustzahlen und des Munitionsverbrauchs im 2.Weltkrieg und im Vietnamkrieg haben ergeben, daß in einzelnen Kampfabschnitten die Zahl der abgegebenen Schüsse je vernichtete gegnerische Einheit weit über 100 000 lag.

88) So: Schoderbeck, J.J.: Some...II,op.cit., S.169ff, auch: Williams,T. u. Ancker, C.J.,jr.: Stochastic Duels, op. cit., S. 804f; die Ausführungen hier folgen Schoderbeck.

Wird also angenommen, daß die hier vorliegende Duellsituation mit hinreichender Genauigkeit durch das Poisson-Modell beschrieben wird, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer durchschnittlichen Beschußrate der Waffe von A von r_A im Zeitintervall t insgesamt k Schüsse von A abgegeben werden, den folgenden Ausdruck:

$$p(k,r_A t) = \frac{(r_A t)^k}{k!} e^{-r_A t} \qquad (88)$$

wobei: $r_A t$ = Poisson-Parameter .

Wird weiterhin angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß A oder B in einem bestimmten Zeitintervall Δt mehr als einen Schuß abfeuert, gleich Null ist, so wird A nach Ablauf der Zeit $t + \Delta t$ nur dann nicht vernichtet sein, wenn A zum Zeitpunkt t nicht vernichtet ist und

- B zum Zeitpunkt t vernichtet ist oder
- B zum Zeitpunkt t nicht vernichtet ist und im Zeitraum Δt nicht schießt oder
- B zum Zeitpunkt t nicht vernichtet ist und im Zeitraum Δt einmal schießt und fehlt.

Im einzelnen:

A wird zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ dann und nur dann nicht vernichtet sein, wenn, unter der Bedingung, daß A zum Zeitpunkt t nicht vernichtet ist, eines der folgenden sechs Ereignisse eintritt:

Ereignis 1: B ist vernichtet zum Zeitpunkt t

Ereignis 2: B ist nicht vernichtet zum Zeitpunkt t; im Zeitraum Δt feuert A einmal, wobei B vernichtet wird

Ereignis 3: B ist nicht vernichtet zum Zeitpunkt t; A schießt und fehlt, B schießt nicht

Ereignis 4: B ist nicht vernichtet zum Zeitpunkt t; A schießt und fehlt, B schießt und fehlt

Ereignis 5: B ist nicht vernichtet zum Zeitpunkt t; A schießt nicht, B schießt nicht

Ereignis 6: B ist nicht vernichtet zum Zeitpunkt t; A schießt nicht, B schießt und fehlt.

Dann sind die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen dieser Ereignisse:

$$P(\text{Ereignis 1}) = P[A(t)] \left\{1-P[B(t)|A(t)]\right\}$$

$$P(\text{Ereignis 2}) = P[A(t)]\ P[B(t)|A(t)]\ \Delta t\ r_A\ p_A$$

$$P(\text{Ereignis 3}) = P[A(t)]\ P[B(t)|A(t)]\ \Delta t\ r_A\ q_A(1-\Delta t\ r_B)$$

$$P(\text{Ereignis 4}) = P[A(t)]\ P[B(t)|A(t)]\ \Delta t\ r_A\ q_A\ \Delta t\ r_B\ q_B$$

$$P(\text{Ereignis 5}) = P[A(t)]\ P[B(t)|A(t)]\ (1-\Delta t\ r_A)(1-\Delta t\ r_B)$$

$$P(\text{Ereignis 6}) = P[A(t)]\ P[B(t)|A(t)]\ (1-\Delta t\ r_A)\ \Delta t\ r_B\ q_B\ .$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß A nach Ablauf der Zeit $t+\Delta t$ nicht vernichtet ist, ergibt sich dann wie folgt:

$$P\ A(t+\ t) = \sum_{x=1}^{6} P(\text{Ereignis } x) \qquad (89)$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß A zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ vernichtet ist, gleich der komplementären Wahrscheinlichkeit zu $P[A(t+\Delta t)]$:

$$P\left[\tilde{A}(t+\Delta t)\right] = 1 - P\left[A(t+\Delta t)\right] \qquad (90)$$

Dies ist zugleich die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg von B im Zeitraum Δt, denn voraussetzungsgemäß kann A nur durch B vernichtet werden.

Ausgehend von Gl.(89), erhält man, wenn alle Glieder mit $(\Delta t)^2$ vernachlässigt werden, unter Berücksichtigung der Beziehungen:

$$q_A = 1 - p_A$$

$$q_B = 1 - q_B$$

als Näherung:

$$P\left[A(t+\Delta t)\right] = P\left[A(t)\right]\left\{1 - P\left[B(t)\middle|A(t)\right] + P\left[B(t)\middle|A(t)\right](1 - \Delta t\, r_B\, p_B)\right\} \qquad (91)$$

oder umgeformt:

$$\frac{\Delta P\left[A(t)\right]}{\Delta t} = - P\left[B(t)\middle|A(t)\right] P\left[A(t)\right] r_B\, p_B$$

$$\text{wobei: } \Delta P\left[A(t)\right] = P\left[A(t+\Delta t)\right] - P\left[A(t)\right]$$

Für unendlich kleine Zeitintervalle ergibt sich dann die folgende Differentialgleichung:

$$\dot{P}\left[A(t)\right] = - P\left[B(t)\middle|A(t)\right] P\left[A(t)\right] r_B\, p_B \qquad (92a)$$

Entsprechend folgt für den Duellanten B:

$$\dot{P}\left[B(t)\right] = - P\left[A(t)\middle|B(t)\right] P\left[B(t)\right] r_A\, p_A \qquad (92b)$$

Da es durch die Vernachlässigung der Flugzeit der Geschosse unmöglich ist, daß beide Duellanten gleichzeitig im Kampf vernichtet werden, muß gelten:

$$P\left[B(t) \;/\; \tilde{A}(t)\right] = 1$$

und:

$$P\left[A(t) \;/\; \tilde{B}(t)\right] = 1$$

Da ferner:

$$P\left[A(t)\right] = P\left[A(t) \;/\; B(t)\right] P\left[B(t)\right] + P\left[A(t) \;/\; \tilde{B}(t)\right] P\left[\tilde{B}(t)\right]$$

und:

$$P\left[B(t)\right] = P\left[B(t) \;/\; A(t)\right] P\left[A(t)\right] + P\left[B(t) \;/\; \tilde{A}(t)\right] P\left[\tilde{A}(t)\right] ,$$

woraus folgt

$$P\left[B(t) \;/\; A(t)\right] P\left[A(t)\right] = P\left[B(t)\right] - P\left[B(t) \;/\; \tilde{A}(t)\right] P\left[\tilde{A}(t)\right]$$

und:

$$P\left[A(t) \;/\; B(t)\right] P\left[B(t)\right] = P\left[A(t)\right] - P\left[A(t) \;/\; \tilde{B}(t)\right] P\left[\tilde{B}(t)\right] ,$$

erhalten die Gleichungen (92a) und (92b) die folgende Form:

$$\dot{P}\left[A(t)\right] = -\left\{P\left[A(t)\right] + P\left[B(t)\right] - 1\right\} \tau_B p_B \qquad (93a)$$

und:

$$\dot{P}\left[B(t)\right] = -\left\{P\left[A(t)\right] + P\left[B(t)\right] - 1\right\} \tau_A p_A \qquad (93b)$$

Unter Berücksichtigung der Ausgangsbedingung:

$$P\left[A(0)\right] = 1 = P\left[B(0)\right]$$

ist das Gleichungssystem integrierbar, so daß sich für die Überlebenswahrscheinlichkeiten von A und B zum Zeitpunkt t die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$P[A(t)] = 1 - \int_{s=0}^{t} r_B p_B \exp - \int_{u=0}^{s} r_A p_A + r_B p_B \, du \, ds \qquad (94a)$$

und:

$$P[B(t)] = 1 - \int_{s=0}^{t} r_A p_A \exp - \int_{u=0}^{s} r_A p_A + r_B p_B \, du \, ds \qquad (94b)$$

Die Wahrscheinlichkeiten für die Vernichtung des gegnerischen Duellanten innerhalb der Zeit t ergeben sich dann wieder aus der Differenz der Überlebenswahrscheinlichkeiten zu 1;
Die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg von A zum Zeitpunkt t

$$P_S\left[A(t)\right]$$

ist also:

$$P_S[A(t)] = 1 - P[B(t)] \qquad (95a)$$

und entsprechend für einen Sieg von B zum Zeitpunkt t:

$$P_S[B(t)] = 1 - P[A(t)] \qquad (95b)$$

Für $t \to \infty$ gilt jedoch:

$$P[A(\infty)] + P[B(\infty)] = 1 \qquad (96)$$

so daß für die Duellanten ihre Überlebenswahrscheinlichkeit gleich ihrer Siegerwahrscheinlichkeit ist:

$$P_S[A(\infty)] = P[A(\infty)] = P(A) \qquad (97a)$$

und:

$$P_S[B(\infty)] = P[B(\infty)] = P(B) \qquad (97b)$$

2.3. Der unentschiedene Ausgang des Duells

2.3.1. Definition des unentschiedenen Ausgangs

Für $t \to \infty$ ergibt das bisher betrachtete Modell

$$P(A) + P(B) = 1$$

Das bedeutet, daß ein einmal begonnenes Duell stets bis zur Entscheidung ausgefochten wird. Nach den bisher getroffenen Annahmen wird diese Entscheidung stets in dem Sinne eindeutig sein, daß einer - und nur einer - der beiden Duellanten vernichtet wird.

Der in der Wirklichkeit sehr häufig anzutreffende Fall des unentschiedenen Ausgangs des Duells, sei es durch Abbruch ehe einer der Teilnehmer vernichtet ist, sei es durch die gleichzeitige oder nahezu gleichzeitige Vernichtung der beiden Kämpfer, wird ohne zusätzliche Annahmen durch das Modell nicht beschrieben.

2.3.2. Der Abbruch des Duells

2.3.2.1. Begrenzter Munitionsvorrat

Ist der Munitionsvorrat, der den Duellanten zur Verfügung steht, nicht unendlich groß, sondern auf eine bestimmte Anzahl von Schüssen begrenzt, so besteht eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich beide Seiten verschossen haben, ohne daß es einer Seite gelungen ist, den vernichtenden Treffer anzubringen. Für $t \to \infty$ gilt dann:

$$P(A) + P(B) + P(AB) = 1 \qquad (98)$$

wobei: P (AB) = Wahrscheinlichkeit, daß nach Abfeuern aller Munition sowohl A als auch B nicht vernichtet sind.

Die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten kann in der folgenden Weise geschehen: 89)

A hat einen begrenzten Munitionsvorrat von n Schuß. Die Wahrscheinlichkeit, daß n eine bestimmte ganze Zahl k ist, beträgt α_k :

$$P(n = k) = \alpha_k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots) \qquad (99)a$$

wobei: $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = 1$

---

89) Auf eine vollständige Darstellung der Entwicklung der Gleichungen wurde hier verzichtet. Siehe dazu: Ancker, C.J., jr.: Stochastic Duels with Limited... op.cit., insbes. S.38, 40ff

Entsprechend gilt für B:

$$P(m=j)=\beta_j \qquad (j=0,1,2,\ldots) \tag{99b}$$

wobei: $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = 1$

Es folgt für die Wahrscheinlichkeit eines Sieges von A unter der Voraussetzung eines beschränkten Munitionsvorrates [90]:

$$P_L(A)=\frac{1}{2}\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k q_A^{\,k}\right]\left[1+\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j q_B^{\,j}\right] + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{A1}(-u)\,\Phi_{B1}(u)\,\frac{du}{u} \tag{100a}$$

wobei Φ_{A1} bzw. Φ_{B1} die charakteristischen Funktionen der Dichtefunktionen der Vernichtungszeiten von A bzw. B sind.

Entsprechend gilt für den Sieg von B:

$$P_L(B)=\frac{1}{2}\left[1-\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j q_B^{\,j}\right]\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k q_A^{\,k}\right] \tag{100b}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{B1}(-u)\,\Phi_{A1}(u)\,\frac{du}{u}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Unentschiedens, die Wahrscheinlichkeit also, daß beide Duellanten nach Abfeuern des gesamten Munitionsvorrates nicht vernichtet sind, hat dann die folgende Form:

$$P_L(AB)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k q_A^{\,k}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j q_B^{\,j} \tag{100c}$$

---

90) Die Gl.(100) sind entnommen: Ancker, C.J., jr.: Stochastic Duels with Limited ..., op.cit., S. 41f

Wird der begrenzte Munitionsvorrat nicht als eine zeitabhängige diskrete Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung betrachtet, sondern wird angenommen, daß er einen bestimmten Wert n bzw. m mit Sicherheit annimmt, so ist

$$P\,[n=j] = 1 \quad \text{und} \quad P\,[n\neq j] = 0 \quad ,$$

so daß sich die Gleichungen wie folgt vereinfachen:

$$P_L(A) = P(A) + \frac{1}{2}\left[(1-q_A{}^n)(1+q_B{}^m)-1\right] \qquad (101)$$

und entsprechend für $P_L(B)$ und $P(AB)$.

Mit $n \to \infty$ und $m \to \infty$ geht $P(AB)$ gegen Null und $(1 - q_A{}^n)$ und $(1 - q_B{}^m)$ gegen Eins, so daß der Fall des unbegrenzten Munitionsvorrats sich als Spezialfall des Duells mit begrenzten Munitionsvorräten ergibt.

Begrenzte Zeitdauer

Noch einen anderen Grund gibt es, der den unentschiedenen Abbruch eines Duells bewirken kann: es ist möglich, daß den Duellanten für die Durchführung des Kampfes nur eine begrenzte Zeit zur Verfügung steht, nach deren Ablauf das Duell nicht fortgesetzt werden kann. 91)

---

91) Ancker,C.J.jr.: Stochastic Duels of Limited Time-Duration; CORS Journal, vol.4, 1966, S.69 ff, hat die P(A), P(B) und P(AB) formuliert für konstante und zufällig verteilte Zeitintervalle zwischen den einzelnen Schüssen sowohl für den Fall, daß die Zeitgrenze fest vorgegeben, als auch für den Fall, daß sie eine Zufallsvariable mit einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

In der Mehrzahl der in der Wirklichkeit vorkommenden Fälle wird der Abbruch eher durch den begrenzten Munitionsvorrat als durch den Ablauf einer bestimmten Frist herbeigeführt werden. Im Falle des Duells zwischen einem Bomber und einem Abfangjäger oder zwischen zwei Jagdflugzeugen setzt der begrenzte Treibstoffvorrat der Jäger dem Duell recht enge zeitliche Grenzen. 92)

2.3.3. Die Vernichtung beider Duellanten

2.3.3.1. Das klassische Duell

Wenn man den Fall eines Duells im engsten Sinne, wenn man ein sog. "klassisches Duell" 93) betrachtet, so beginnt dieses damit, daß sich die Duellanten mit geladenen Waffen schußbereit gegenüberstehen und auf ein Kommando gleichzeitig aufeinander feuern. Ist das Duell nicht auf eine Runde beschränkt, so schließen sich die anderen Runden an die erste entweder in konstanten oder aber in zufällig verteilten Zeitintervallen an. In der ersten Runde besteht eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit, daß beide Duellanten vernichtet werden. 94) Diese ergibt sich nach dem Multiplikationstheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung wie folgt:

$$P_k(AB) = P_A P_B \qquad (102)$$

---

92) Blinkenberg,R.L., Arnold,G.L.u.Clauss,J.S.jr.: Lockheed Air Combat Analysis Model; Burbank/Calif.,1966,Lockheed Systems Research, nehmen für die Dauer des Kampfes zwischen Jäger und Bomber eine Zeit von 3 Min.an, die sich mit den im Korea-Krieg gewonnenen Erfahrungen deckt. (S.2)

93) "Klassisches Duell" oder "Classical Duel" nach Williams u.Ancker, .. op.cit., S.811; dort auch die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten.

94) Das ist gleichbedeutend mit dem gleichzeitigen "Sieg" beider Duellanten.
Auch in der folgenden Uberlegung ist abgestellt auf den Sieg der beiden Kontrahenten. Es kann selbstverständlich auch im weiteren Verlaufe des Duells der Fall eintreten, daß der eine Duellant seinen Gegner vernichtet und gleichzeitig von ihm vernichtet wird. Wenn aber auch darin ein Sieg gesehen wird, braucht dieser Fall nicht besonders berücksichtigt zu werden.

Die Siegeswahrscheinlichkeiten für A und B sind durch den gleichzeitigen ersten Schuß gegenüber dem fundamentalen Duell verändert:
A gewinnt nur, wenn er B in der ersten Runde vernichtet, von diesem aber nicht vernichtet wird, oder wenn er und B in der ersten Runde fehlen, er aber den B später vernichtet:

$$P_K(A) = p_A q_B + q_A q_B P(A) \qquad (103)$$

wobei: P (A) = Siegeswahrscheinlichkeit von A in einem fundamentalen Duell.

P_K (B) ergibt sich entsprechend, und:

$$P_K(A) + P_K(B) + P_K(AB) = 1 \qquad (104)$$

Die Wahrscheinlichkeiten des klassischen Duells gelten gleichermaßen für Duelle mit konstanten wie Duelle mit zufällig verteilten Zeitintervallen zwischen den einzelnen Schüssen.

2.3.3.2. Das gleichzeitige Feuern im Verlauf eines Duells mit konstanten Zeitintervallen zwischen den einzelnen Schüssen

Nur für den Fall der konstanten Zeitintervalle zwischen den einzelnen Schüssen gilt jedoch die folgende Ueberlegung: 95)

---

95) Ancker, C.J.jr. u. Williams, T.: Some Discrete ...op.cit., Seite 204

Wenn für A die Zeit vom Beginn des Duells bis zur Abgabe des ersten Schusses gleich a, also gleich der Zeit zwischen zwei beliebigen anderen Schüssen dieses Duells ist, wenn für B Entsprechendes gilt, wenn schließlich ja = kb ist, so werden nach Ablauf dieser Frist beide Duellanten gleichzeitig schießen, womit die Möglichkeit der beiderseitigen Vernichtung gegeben ist.

Wenn sich a zu b verhält wie α zu β, wobei α und β teilerfremd sind, wird jedesmal, wenn A β oder ein ganzzahliges Vielfaches von β Runden und B α oder ein ganzzahliges Vielfaches von α Runden geschossen hat, von beiden Duellanten gleichzeitig gefeuert.

Das Ereignis der beiderseitigen Vernichtung tritt jedoch nur dann ein, wenn bei dem gleichzeitigen Feuern beide Seiten treffen und vorher stets gefehlt haben, so daß die gleichzeitige Vernichtung beider Duellanten die folgende Wahrscheinlichkeit hat: 96)

$$P(AB) = p_A p_B \sum_{j=0}^{\infty} q_A^{(j+1)\beta-1} \; q_B^{(j+1)\alpha-1} \qquad (105)$$

2.3.3.3. Berücksichtigung der Flugzeit der Geschosse

Erwähnt sei schließlich noch eine dritte Möglichkeit der Vernichtung der beiden Duellanten 97):
Wenn die Annahme, daß die Flugzeit des Geschosses so klein

---

96) Ancker jr., C.J. und Williams, T.: Some Discrete ..., op.cit., S. 204

97) Ancker jr., C.J.: Stochastic Duels with Time-of-Flight included; Opsearch, vol. 3, 1966, S. 71 ff.

ist, daß sie vernachlässigt werden kann, fallengelassen wird, besteht die Möglichkeit, daß A, nachdem B auf ihn schon einen vernichtenden Treffer abgegeben hat, der jedoch noch nicht im Ziele eingeschlagen ist, einen den B vernichtenden Treffer abgibt, der den B erst dann erreicht, wenn A schon vernichtet ist.

Ein derartiges Ereignis stellt im Erdkampf nur bei weitreichenden Waffen, deren Geschosse folglich eine lange Flugdauer haben, eine beachtenswerte Größe dar; auf die Vorstellung des dieser Lage angemessenen Modells wird hier verzichtet.

2.4. Erweiterungen des Modells

2.4.1. Möglichkeiten der Erweiterung

Versuche sind unternommen worden, dem auf der Theorie der stochastischen Duelle beruhenden Modell eine, wenn möglich, größere Realitätsnähe zu geben. Es ist weiterhin versucht worden, den Umfang des Modells zu vergrößern, um damit von der reinen Duellsituation, die nur in wenigen Fällen der Kampfgeschehen in angemessener Weise entspricht, fortzukommen. Schließlich sind derartige Modelle benutzt worden, um militärische Probleme, die nicht unmittelbar das Kampfgeschehen betreffen, einer Lösung näherzubringen.

Diese Bemühungen sollen hier, unter Verzicht auf Einzelheiten und auf die mathematische Analyse der Probleme, in ihren Grundzügen vorgestellt werden.

2.4.2. Veränderliche Trefferwahrscheinlichkeiten

Wenn angenommen wird, daß die Duellanten sich nicht deckungslos gegenüberstehen, dann ist die Annahme der konstanten Trefferwahrscheinlichkeiten p_A und p_B über die Dauer des Duells hier nicht sehr realistisch, weil dem Gegner durch die Abgabe von Schüssen Information über die örtliche Lage der eigenen Stellung zuteil wird, welche dieser dazu benutzt, mit größerer Genauigkeit zu zielen, wodurch sich die Trefferwahrscheinlichkeit erhöht. Schoderbek [98] hat dieses Problem untersucht und schlägt zu seiner Lösung vor, die p_A und p_B als zeitabhängige Variable zu betrachten. Er weist darauf hin, daß dieses Verfahren nur solange vertretbare Resultate bringt, wie sich die Duellanten nicht räumlich verändern.

Zwei andere Ansätze, die Trefferwahrscheinlichkeit so zu formulieren, daß sie die Wirklichkeit besser beschreibt, sind von Bhashyam und Naunihal Singh [99] untersucht worden: durch das Abfeuern mehrerer Schüsse in kurzer Aufeinanderfolge wird die Treffergenauigkeit einer Waffe negativ beeinflußt. Dieser Einfluß kann dadurch berücksichtigt werden, daß jedem Schuß, gemäß seinem Platz in einer Serie von Schüssen, eine eigene Trefferwahrscheinlichkeit zuerkannt wird. Es erscheint fraglich, ob diese Einflußgröße, welche nur eine unter vielen ist, auf diese Weise isoliert erfaßt werden kann. Auch die Überlegung, daß bei begrenztem Munitionsvorrat die Duellanten mit wachsender Treffergenauigkeit schießen, weil sie sich, das Ende ihrer Munition vor Augen, ständig größere Mühe geben, zu treffen, erscheint zumindest zweifelhaft. Es ist durchaus denkbar, daß der gegenteilige Effekt eintritt, sei es aus Gründen zunehmender Er-

---

98) Schoderbek, J.J. II, op.cit. S.173-175

99) Bhashyam,N. u.Singh,N.: Stochastic Duels with Varying Single-Shot Kill Probabilities; OR,vol.15,1967, S.233 ff.

müdung, sei es aufgrund der wachsenden nervlichen Anspannung, die die Abgabe eines präzisen Schusses nicht mehr ermöglicht.

2.4.3. Erhöhung der Zahl der Teilnehmer

Das Wesen des Duells besteht darin, daß sich zwei feindliche Einheiten im Kampf gegenüberstehen. Das überwiegend anzutreffende Kampfgeschehen bei kriegerischen Handlungen zeichnet sich jedoch dadurch aus, daß auf den zwei gegnerischen Seiten eine Vielzahl von Einheiten beteiligt sind. Wenn die Theorie der stochastischen Duelle zur Analyse kriegerischer Handlungen dienen soll, muß folglich versucht werden, die Duellsituation zu erweitern.

Ein erster Schritt in dieser Richtung ist die Annahme, daß dem Duellanten A eine Vielzahl von Gegnern gegenübersteht, von denen einer, B_1, den Kampf gegen A aufnimmt, während sich die anderen passiv verhalten, und daß der (siegreiche) Duellant A sich sofort nach Vernichtung von B_1 gegen B_2 etc. wendet, bis er schließlich selbst vernichtet wird.[100]

Von besonderem Interesse ist hierbei die Wahrscheinlichkeit, daß A insgesamt k Duelle überlebt, die Verteilung der Lebenszeit von A:
A wird das k-t Duell dann - und nur dann - überleben, wenn er alle vorangehenden k-1 Duelle mit der Vernichtung des Gegners abgeschlossen hat und anschließend auch B_k vernichtet. Es ist hierbei durchaus nicht notwendig, daß alle B die gleiche Kampfkraft aufweisen.

Über die Überlebenswahrscheinlichkeit läßt sich dann die Verteilfunktion der Lebenszeit von A ermitteln.

---

100) Schoderbek II, op.cit., S.176-179

Der nächste Schritt hin zu einer Beschreibung einer kriegerischen Aktion ist der gleichzeitige Kampf von zwei Einheiten auf der einen Seite gegen eine Einheit auf der anderen Seite[101], und dann gegen ebenfalls zwei Einheiten[102].

Feuern zwei Einheiten der einen Seite, A_1 und A_2 auf B, so hat dieses "Dreiecksduell" folgende mögliche Ausgänge:

(1) nach Vernichtung von B durch A_1 oder A_2 oder A_1 und A_2 gleichzeitig überleben beide Einheiten von A

(2) B vernichtet A_1 oder A_2, wird dann durch die überlebende Einheit von A vernichtet.

(3) B vernichtet nacheinander die beiden Einheiten von A und überlebt.

(4) B vernichtet eine Einheit von A; die überlebende Einheit von A und B vernichten sich dann gleichzeitig.

Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen dieser Ereignisse lassen sich in der gewohnten Weise errechnen.

Durch die Aufnahme eines weiteren Teilnehmers am Duell in das Modell erhöht sich allerdings der Rechenaufwand beträchtlich. Um das Modell dennoch übersichtlich zu halten, haben Ancker jr. und Williams zwei zusätzliche Analysen getroffen: die Trefferwahrscheinlichkeit ist für alle Teilnehmer einer Seite gleich; alle Teilnehmer am Duell schiessen stets gleichzeitig.

---

101) Ancker,C.J.jr.u.Williams,T.: Some Discrete ..,cp.cit. S.209-211

102) dieselben, ... S.211-215

Sind diese Annahmen schon im Falle des Dreicksduells problematisch, so trifft dieses in verstärktem Maße zu auf Duellsituationen mit zwei oder mehr Teilnehmern auf beiden Seiten.

Hierbei muß dann auch noch eine Annahme getroffen werden über die Strategie der Duellanten: schießen A_1 und A_2 auf B_1 und B_2, so kann A_1 sein Feuer auf B_1 und A_2 auf B_2 richten, oder es können A_1 und A_2 beide zunächst B_1 beschiessen und sich nach dessen Vernichtung gemeinsam gegen B_2 wenden 103).

Wird die Zahl der Kämpfenden auf beiden Seiten sehr groß, dann ist die Zahl der Strategien so zahlreich, daß sie unübersichtlich wird. Diese Schwierigkeit kann dadurch bewältigt werden, daß angenommen wird, daß sich jeder Kämpfer aus der Zahl seiner Gegner einen bestimmten Gegner zufällig auswählt und diesen solange bekämpft, bis er ihn vernichtet hat oder bis er selber vernichtet worden ist. 104) Auch hier wird wieder angenommen, daß alle Einheiten gleichzeitig schiessen, und daß die Trefferwahrscheinlichkeiten aller Einheiten einer Seite gleich sind.

Durch die zufällige Auswahl der Gegner muß die Möglichkeit in Betracht gezogen werden, daß ein Gegner von mehreren Schüssen vernichtet wird 105). Besteht die Seite B vor Abgabe der ν-ten Salve aus N Einheiten, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß sie nach Abgabe der ν-ten Salve noch aus n Einheiten ($n < N$) besteht, wie folgt:

---

103) Ancker,C.J. u.Williams,T.: Some Discrete.. op.cit.S.214 zeigen, daß die erste Strategie der zweiten insofern überlegen ist, als $P_1(A) > P_2(A)$.

104) Ancker,C.J. u.Williams,T.: Some Discrete... op.cit. S.215

105) Dazu: Robertson,J.J.: A Method of Computing Survival Probabilities of Several Targets versus Several Weapons; OR vol.4,1956, S.546 ff.

P (N-n) Schüsse treffen (N-n) Einheiten + P (N-n+1) Schüsse treffen (N-n) Einheiten + ... + P (N) Schüsse treffen (N-n) Einheiten ,

wobei N die Gesamtzahl der von der Seite A abgegebenen Schüsse und damit gleich der Anzahl der Einheiten von A ist.

Es lassen sich auf diese Weise die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang von N nach n ($N \geq n \geq 0$) für die Streitkraft B und entsprechend die Wahrscheinlichkeiten für die Streitkraft A berechnen. Damit ist aus dem Modell eines Duells ein Kampfmodell geworden, wobei der Kampfablauf durch einen Markoff-Prozeß beschrieben wird.

Eine unrealistische Annahme liegt dem Modell von Robertson zugrunde: das Feuer der Seite A wird stets zufällig verteilt auf alle Einheiten der Seite B, unabhängig davon, ob diese Einheiten schon oder noch nicht vernichtet sind. Ein diesbezüglich verbessertes Modell ist von Helmbold entwickelt worden[106]. Dort findet sich auch der Ansatz für eine in der Zeit verteilte Schußfolge[107].

2.4.4. Logistische Gesichtspunkte

Die Theorie der stochastischen Duelle, soweit bisher betrachtet, analysiert Kampfgeschehen, sei es, daß der Gegenstand der Analyse ein echtes Duell in dem Sinne ist, daß auf jeder Seite nur eine Einheit beteiligt ist, sei es, daß das Modell ausgedehnt wird auf Lagen, in denen sich eine Vielzahl von Einheiten auf beiden Seiten gegenüberstehen.

---

106) Helmbold, R.L.: A 'Universal' Attrition Model; OR, vol. 14 1966, S. 626ff

107) ibid., S. 632f

Ergebnis der Analyse sind Ausdrücke für Sieges- und Überlebenswahrscheinlichkeiten.

Wenn der Schwerpunkt der Untersuchung jedoch gelegt wird auf die Verteilung der abgefeuerten Schüsse bis zur Entscheidung des Duells und auf die Verteilung der Zeit, die vergeht bis zur Entscheidung, ist damit dem militärischen Logistiker eine Methode an die Hand gegeben, die ihm hilft, die von den Waffen und Waffensystemen benötigte Menge an Munition und Betriebsstoff zu bestimmen, diese damit zu versehen und entsprechende Vorräte anzulegen[108].

2.5. Beurteilung der Theorie der stochastischen Duelle

Die Theorie der stochastischen Duelle beschäftigt sich mit den mikroskopischen Zügen des Kampfes, wie individuelle Vernichtungswahrscheinlichkeit, Zeit zwischen einzelnen Schüssen, Begrenzung des Munitionsvorrats eines einzelnen Schützen etc.[109] Die Einzelheiten der Mikroanalyse sind i.d.R. leichter und genauer zu erfassen als globale Größen, denen stets eine große Ungenauigkeit anhaftet.

Es muß allerdings bedacht werden, daß die Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Kampfwerte, die sich bei den Abnutzungsmodellen ergeben haben, bei den Duellmodellen grundsätzlich in gleicher Weise bestehen.

---

108) Ancker,C.J.jr. u.Gafarian,A.V.: The Distribution of Rounds Fired in Stochastic Duels; Naval Research Logistics Quarterly, vol. 11,1964, S.3o3 ff.
Ancker,C.J.jr. u.Gafarian,A.V.: The Distribution of the Time-Duration of Stochastic Duels; Naval Research Logistics Quarterly, vol.12, 1965, S.275ff

109) Ancker,C.J.jr.: The Status .... op.cit., S.388

Durch die Untersuchung der kleinsten Bausteine eines Kampfgeschehens wird eine unmittelbare Einsicht in die Zusammenhänge vermittelt, wodurch leichter die Möglichkeit gegeben ist, Maßnahmen zur Verbesserung der Wirksamkeit von Waffen oder zur Verbesserung der Taktik zu ergreifen.[110]

Dieser Aufbau des Duells von unten her begrenzt aber auch seine Anwendbarkeit. Nur durch weitergefaßte Annahmen, z.B. bezüglich der zufälligen Auswahl eines Gegners, kann dieses Modell auf größere Gruppen anwendbar gemacht werden. In seiner gegenwärtigen Form erscheint die obere Grenze bei etwa 15 Mann auf jeder Seite zu liegen.[111]

Durch weniger exklusive Annahmen werden aber die Vorzüge, die das Modell aufweist, weitgehend hinfällig. Es muß dann mit mittleren Beschußraten, mittleren Vernichtungswahrscheinlichkeiten gearbeitet werden, womit der Verläßlichkeitsgrad des Modells nicht mehr über dem von Abnutzungsmodellen liegt.

---

110) Bhashyam,N.u.Singh,N.: Stochastic Duels ..., op.cit. S.233

111) Robertson,J.J.: A Method ..., op.cit., S.546

3. Anwendungsmöglichkeiten der Spieltheorie

3.1. Einführende Überlegungen

Der Spieltheorie, der mathematischen Theorie der Konfliktsituationen [112], liegt eine Analogie zu einer Klasse von Problemen der Wirklichkeit zugrunde [113]. Diese Probleme können unter dem Begriff : "Interessenkonflikte zwischen Gegenspielern, die den Ausgang eines Konfliktes selbst beeinflussen können" [114] zusammengefaßt werden. Neben den Situationen, wie sie bei bestimmten Gesellschaftsspielen auftreten, neben Erscheinungen aus u.a. Wirtschaft, Gesellschaft, Sport, gehören ohne Zweifel alle militärischen Probleme hierher [115].

Wenn militärische Probleme Gegenstand einer spieltheoretischen Analyse sein können, dann muß diese Theorie auf ihre Eignung untersucht werden, den Zielen dieser Arbeit:

1. Beschreibung von Kampfabläufen,
2. Rationalisierung von Entscheidungen

im konventionellen Krieg auf mittlerer Führungsebene zu dienen.

Das Ziel 1 ist mit ihrer Hilfe nicht zu erreichen[116]. Hingegen kann sie auf dem Wege hin zu Ziel 2 sinnvoll eingesetzt werden, denn ihre Aufgabe ist "die Ausarbeitung von Empfehlungen für ein vernünftiges Verhalten der Spieler

112) Wentzel, J., op.cit., S. 265

113) Dathe, H.M.: Über die Anwendung der Theorie der strategischen Spiele; Wehrtechnische Monatshefte, vol. 64, 1967, S. 49

114) ibid., S. 49

115) S.o. Einleitung S. 1

116) Diese mangelnde Eignung der Spieltheorie zur Beschreibung von Kampfabläufen gilt nicht ausnahmslos: Wenn sich das Kampfgeschehen aufgrund der eingesetzten Waffen reduziert auf einen einmaligen Schlagabtausch der Gegner von sehr kurzer Dauer, dann kann die Spieltheorie ein ausreichendes Instrument zur Analyse eines derartigen Kampfes sein. In dieser Weise setzt Morgenstern die Spieltheorie ein zur Analyse des atomaren Patt zwischen den Globalmächten USA und UdSSR (s. Morgenstern, O.: Strategie - heute; Frankfurt 1962). Er weist ausdrücklich (S. 162f) auf die Bedeutung des Faktors Zeit für die Gültigkeit der Analyse hin.

Die Morgensternsche Analyse wird hier nicht berücksichtigt, da ihr Gegenstand die atomare Kriegführung auf höchster Führungsebene ist.

in Konfliktsituationen, das heißt die Bestimmung einer optimalen Strategie für jeden von ihnen" [117].

Dabei ist eine Strategie "eine Sammlung von Entscheidungsregeln, bei der für jede Spielsituation, die irgendwann einmal im Laufe des Spiels eintreten kann, eindeutig bestimmt wird, welche Entscheidung der betreffende Spieler zu wählen hat" [118]. Haben folglich beide Spieler eine Strategie gewählt, so ist "der Ablauf und der Schlußstand einer Partie bekannt", wofern "auf den Partieverlauf keine 'Zufälligkeiten' einwirken" [119].

Als optimale Strategie eines Spielers wird nun die Strategie bezeichnet, "die bei mehrfacher Wiederholung des Spieles dem jeweiligen Spieler den maximal möglichen mittleren Gewinn sichert (oder den minimal möglichen Verlust)" [120].

Es wird hier vernünftiges Verhalten insofern unterstellt, als angenommen wird, daß der Spieler diejenige Strategie, die ihm von allen möglichen den größten Mindestgewinn bzw. den niedrigsten Höchstverlust sichert, daß er also die optimale Strategie wählt. [121]

Schließlich soll unter einem Spiel eine Anzahl von Regeln verstanden werden, die die zulässigen Handlungen der Spieler, also derjenigen beschreiben, die am Konflikt beteiligt sind. Diese Regeln müssen genau bezeichnen, was jeder Spieler in allen möglichen Lagen im Spielverlauf tun darf, müssen folglich auch Angaben über den Gewinn, der erzielt werden kann und über das Ende des Spiels enthalten. [122]

117) Wentzel, J., op.cit., S. 268

118) Henn-Künzi, op.cit., S. 70

119) Wetzel, W.: Theoretische Grundlagen des linearen Programmierens, der Einsatz-Ausstoß-Analyse und der Spieltheorie; in: Anwendung der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme; 3.Aufl. Würzburg, Wien 1966, S. 171

120) Wentzel, J., op.cit., S. 268

121) Weil die militärischen Führer durchaus nicht immer ein derartiges Verhalten als einzig vernünftiges angesehen haben, da mit diesem Verhalten der Schein des Rückversicherns verbunden ist, da häufig Schneid und Bravour höher im Wert standen als klare Überlegung, erscheint die Kriegsgeschichte im Lichte dieser Definition als nicht abreißende Kette von Handlungen der Unvernunft.

122) Henn-Künzi, op.cit., S. 70

3.2. Spieltheoretische Modelle auf der Grundlage der Abnutzungstheorie

3.2.1. Gewinn und Verlust

Zunächst soll die Konzeption eines spieltheoretischen Modells vorgestellt werden, welches auf den Erkenntnissen beruht, die im ersten Teil dieser Arbeit gewonnen worden sind.

Die folgende Ausgangslage sei gegeben:
Die Streitkraft eines Landes, Rotland, fällt in ein anderes Land, Blauland, ein und versucht, dieses zu erobern.

Diese Eroberung gelingt nur dann, wenn die Streitkraft Rot die zur Verteidigung von Blauland bereitstehenden Truppen so schwächt, daß diese ihren Auftrag nicht mehr ausführen können. Das tritt dann ein, wenn eine genügend große Zahl von blauen Einheiten vernichtet worden ist; darauf ist folglich das Bemühen der Streitkraft Rot gerichtet.

Das Bestreben der Streitkraft Blau geht nicht dahin, das Land der Streitkraft Rot zu erobern, sondern, das eigene Land vor dem Zugriff einer fremden Macht zu bewahren. Dieses Ziel kann dadurch erreicht werden, daß eine möglichst große Zahl roter Einheiten vernichtet wird, wodurch dann diese Streitkraft von ihrem Vorhaben ablassen muß.

Dieses Ziel kann aber auch in der Weise erreicht werden, daß die Streitkraft Blau möglichst Verluste vermeidet und dadurch so stark bleibt, daß der Gegner seinen Willen nicht durchsetzen kann.

Da die eigenen Verluste im ersten Fall höher sind als im zweiten, entscheidet sich die Führung von Blau für den zweiten Weg.

Es stehen sich also zwei Parteien gegenüber, deren Ziele genau entgegengesetzt sind: Blau will seine Verluste minimieren, Rot will sie maximieren, wobei jede Vernichtung einer Einheit von Blau für Rot einen Gewinn in eben der Höhe bedeutet, wie dies von Blau als Verlust empfunden wird.

Betrachtet man nun eine Kampfsituation, in welcher sich zwei in sich homogene Gruppen der beiden Gegner gegenüberstehen, so gilt, unter den getroffenen Annahmen, auch hier, daß die Gruppe von Rot bemüht ist, möglichst viele Einheiten von Blau zu vernichten, und daß die Gruppe von Blau vor allem gerade dies zu verhindern sucht. Der übergeordnete Auftrag, welcher aus den Zielen der Gesamtkriegsführung resultierte, bleibt also auf dieser Ebene für beide Seiten gültig. Es kommt aber hinzu, daß sich die Gruppe von Rot bemüht, ihr Vorhaben in einer bestimmten Zeit zu erreichen, welche sich aus der Kampfführung und den Absichten des übergeordneten Verbandes, in dessen Rahmen diese Gruppe eingegliedert ist, ergibt.

3.2.2. Das Ende des Spiels

Da die Streitkraft Rot angreift, bestimmt zunächst sie das Handeln, liegt folglich auch bei ihr und ihren Gruppen die Bestimmung des Zeitpunktes des Kampfendes.

Eine Möglichkeit, den Kampf der beiden Gruppen zu beenden, ist die völlige Vernichtung mindestens einer Gruppe.

Es ist aber auch möglich, daß der Kampf abgebrochen wird, sei es, weil die für die rote Gruppe verfügbare Zeit abgelaufen ist, sei es, weil die Stärke dieser Gruppe aus Gründen ihrer Funktionsfähigkeit und der Fortsetzung des Krieges nicht unter eine bestimmte Größe absinken darf oder weil die Verluste dieser roten Gruppe eine Höhe annehmen, die nicht mehr dem Wert der blauen Gruppe und des von ihr verteidigten Objektes im subjektiven Urteil der Führung von Rot entspricht.
Hat die rote Gruppe einen Auftrag, der es ihr erlaubt, den Kampf abzubrechen, so wird sie in keinem Fall den Kampf fortsetzen bis zu ihrer völligen Vernichtung. Sie wird vielmehr in dem Augenblick, in dem ersichtlich ist, daß sie bei Fortführung des Kampfes mit großer Wahrscheinlichkeit vernichtet wird, von der Möglichkeit des Kampfabbruchs Gebrauch machen.
Wenn von der Möglichkeit gesprochen wurde, den Kampf der beiden Gruppen durch die völlige Vernichtung mindestens einer Gruppe zu beenden, so kann diese Möglichkeit hier, unter der Annahme, daß Rot den Kampf abbrechen darf, nur dann realisiert werden, wenn die vernichtete Gruppe die blaue ist.

3.2.3. Bestimmung der Strategien

Betrachtet man nun im Rahmen des Angriffskrieges von Rot gegen Blau den Kampf einer Gruppe von Rot gegen eine Gruppe von Blau, so ergeben sich die folgenden Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen dem Kampf der Gesamtstreitkräfte und dem Kampf zwischen zwei ihrer Gruppen:

Obgleich die Gesamtstreitkraft Rot angreift, hat jede Gruppe dieser Streitkraft die Möglichkeit, den ihr übertragenen Auftrag in verschiedener Weise auszuführen; sie ist dabei in den Möglichkeiten ihres Handelns nicht auf den Angriff beschränkt.

Aber:

Obgleich eine einzelne Gruppe von Rot, im Gegensatz zur Gesamtstreitkraft, verschiedene Möglichkeiten des Handelns, verschiedene Strategien hat, ist das Ziel dieser Gruppe von Rot identisch mit dem Ziel der roten Gesamtstreitkraft: Vernichtung einer möglichst großen Zahl von Einheiten der Streitkraft Blau.

Und:

Obgleich die Gesamtstreitkraft Blau die Abwehr führt, hat jede Gruppe dieser Streitkraft die Möglichkeit, den ihr übertragenen Auftrag in verschiedener Weise auszuführen, muß sie nicht in jedem Fall verteidigen.

Aber:

Aber auch wenn eine einzelne Gruppe von Blau, im Gegensatz zur Gesamtstreitkraft, verschiedene Möglichkeiten des Handelns, verschiedene Strategien hat, ist das Ziel dieser Gruppe von Blau identisch mit dem Ziel der blauen Gesamtstreitkraft: Bewahren einer möglichst großen Zahl von Einheiten der Streitkraft Blau vor der Vernichtung.

Wird angenommen, daß sich die Möglichkeiten des Handelns sowohl der Gruppe von Rot als auch der Gruppe von Blau erschöpfen in (s.o. 1.2.4.):

- Angriff
- Verteidigung einer über die Dauer des Kampfes hinweg gleichbleibenden Fläche mit abnehmender Dichte
- Verteidigung einer sich verkleinernden Fläche mit über die Dauer des Kampfes hinweg gleichbleibender Dichte ,

dann wird Blau die Möglichkeit wählen, bei welcher es die geringsten Verluste, Rot entsprechend diejenige, bei welcher Blau die größten Verluste erleidet.

Dabei wird diese Entscheidung von beiden Seiten unabhängig davon getroffen, ob der Kampf über die ganze verfügbare Zeit geht oder schon vorher abgebrochen wird, da der vorzeitige Abbruch vor Beginn des Kampfes nicht bekannt ist.

Da Blau seine Verluste minimieren, Rot jedoch die Verluste von Blau maximieren will, da also jede Vernichtung einer Einheit von Blau für Rot einen Gewinn in eben der Höhe bedeutet, wie dies von Blau als Verlust empfunden wird, ist hier die Situation eines Zwei-Personen-Null-Summen-Spiels gegeben. Die Auszahlungen in der Spielmatrix ergeben sich dann aus der Differenz zwischen $M(0)$ und $M(t_{max})$, wobei t_{max} der Zeitpunkt des Kampfabbruches durch Zeitablauf ist.

Ergibt nun die Kombination einer Strategie Bl_i von Blau mit einer Strategie R_j von Rot, daß für t_{max} die Gruppe von Rot schon unter ihre Mindeststärke abgesunken ist, muß anstelle von t_{max} der Zeitpunkt t^*_{max} gewählt werden, an dem die rote Gruppe unter ihre Mindeststärke abzusinken droht, denn mehr Zeit steht der roten Gruppe für die Erfüllung ihres Auftrages dann nicht zur Verfügung.[123)]

---

123) Dabei wird dieser Zeitpunkt durch Auflösen der die gewählte Strategie von Rot beschreibenden Gleichung für $N(t)$ nach t und durch Einsetzen der Mindeststärke für $N(t)$ berechnet. Dieser Zeitpunkt ist t^*_{max}. $M(t^*_{max})$

Die Frage nach den optimalen Strategien für Rot und Blau läßt sich in der für die Spieltheorie üblichen Weise beantworten.[124)]

Gibt es für Rot eine Strategie, die in dem speziellen Sinne streng dominant ist, als sie stets zur maximalen Auszahlung für Rot, also zur Vernichtung von Blau führt, so reichen die bisher gegebenen Verhaltensregeln nicht aus, um Blau eine optimale Entscheidung zu ermöglichen. Mehrere Wege sind hier beschreitbar, deren Anwendbarkeit von Fall zu Fall entschieden werden muß, u.a.:

- Blau wählt die Strategie, bei welcher die Zahl der vernichteten roten Einheiten maximal ist oder
- Blau wählt die Strategie, mit welcher die eigene Vernichtung am längsten hinausgezögert wird.

Auch die Möglichkeit einer Kapitulation ist hier zu berücksichtigen.

3.2.4. Möglichkeiten der Ausdehnung

Eine Ausdehnung dieses Ansatzes auf heterogene Streitkräfte ist nur in sehr begrenztem Umfange möglich.

Grundsätzlich gilt zwar die Argumentation auch für einen Angreifer, dessen Einheiten im Kampfwert voneinander verschieden sind. Sie gilt aber nicht dort, wo Rot eine streng dominante Strategie wählen kann. Hier muß, wenn der Zeitfaktor keine entscheidende Bedeutung hat, ein gemeinsamer, die Einheiten von Rot verbindender Wertmaßstab gefunden werden, damit Blau eine vernünftige Entscheidung treffen kann.

Ist auch der Verteidiger eine Gruppe, die aus verschiedenwertigen Einheiten zusammengesetzt ist, so kann, bei Vorliegen einer streng dominanten Strategie für Rot, in der gleichen Weise verfahren werden.

---

ergibt sich dann durch Einsetzen von t^*_{max} in die Gleichung für M(t). Dieses $M(t^*_{max})$ ist dann die Auszahlung. Vgl. dazu Anhang 2.

124) S. z.B. Kemeny, J.G., Snell, J.L. u. Thompson, G.L.: Einführung in die endliche Mathematik; Ludwigshafen 1963, S. 273ff oder Yamane, T.: Mathematics for Economists; 2.Aufl. Englewood Cliffs/N.J. 1968, S. 691ff

Gibt es jedoch für Rot keine derartige Strategie, so ist, bedingt durch das Fehlen eines objektiven Wertmaßstabes für die einzelnen Einheiten von Blau, die Grenze der Anwendbarkeit des Modells erreicht. Hier kann nur dann eine vernünftige Entscheidung getroffen werden, wenn für Blau bei der Wahl einer bestimmten Strategie die Verluste in allen Waffenarten stets kleiner sind als bei Wahl einer beliebigen anderen Strategie.

3.3. Andere spieltheoretische Modelle

3.3.1. Landkriegführung

Wentzel [125] hat ein Modell entwickelt, welches im Landkampf, gesehen aus der Sicht des Angreifers, das optimale Verhalten zweier Gegner beschreibt. Ein Beispiel wird angeführt: Für den Angreifer gilt es, ein im Besitz von Blau befindliches Objekt zu besetzen.

Befinden sich die für diese Aktionen verfügbaren roten Truppen in A, das von Blau geschützte Objekt in B, so ergeben sich, wenn zwei Wege von A nach B führen, die Strategien für Rot durch die verschiedenen Möglichkeiten, seine Einheiten auf diese Angriffswege zu verteilen. Die Strategien für Blau sind dann entsprechend durch die Verteilung seiner Truppen auf diese beiden Wege gegeben.

Das Ende des Spiels wird durch die Besetzung des Objektes durch Rot oder durch das Zurückschlagen des Angriffs erreicht.

Der Gewinn wird mit 1 angenommen, wenn es Rot gelingt, das Objekt zu nehmen, mit 0 dann, wenn Rot zurückgeschlagen wird, mit P ($0 < P < 1$), wenn eine bestimmte Wahrscheinlichkeit P besteht, daß Rot sein Ziel erreicht.

---

125) Wentzel, J., op.cit., S. 267ff

Bei Kenntnis der P lassen sich dann die optimalen Strategien in der üblichen Weise finden.

Für die Anwendung der Spieltheorie im militärischen Bereich, aber auch für die Behandlung anderer militärischer Probleme, die die Bewertung von Menschenleben erfordern, sind das Modell und das angeführte Beispiel von Wentzel im höchsten Grade charakteristisch:

Da ein 'richtiger' Maßstab, der für Menschen und Material gleichermaßen gilt, der den Wert eines Menschenlebens, den Wert des Fortbestandes eines Gemeinwesens in angemessener Weise berücksichtigt, nicht zur Verfügung steht, wählt man einen quasi-objektiven Ersatzmaßstab, der hier z.B. in der Wahrscheinlichkeit des Besitzes des umkämpften Objektes besteht.

Es wird aus diesem Vorgehen aber noch eine andere Besonderheit des militärischen Bereiches deutlich: Zuerst und vor allem anderen muß der Auftrag erfüllt werden. Dieses Ziel hat Vorrang vor jeder anderen Überlegung, auch vor dem Bemühen, das Leben der am Kampf beteiligten Soldaten zu schonen. So ist es dann nicht erstaunlich, wenn Wentzel schreibt: "Die Verluste beider Seiten während des Gefechts bleiben unberücksichtigt." [126]

3.3.2. Luftkriegführung

Eine Möglichkeit der Anwendung der Spieltheorie soll noch kurz vorgestellt werden, die Anwendung auf Luftkampfsituationen. Es liegt hier eine relativ große Zahl von Untersuchungen vor [127].

---

126) Wentzel, J., op.cit., S. 267

127) Berkovitz, L.D. u. Dresher, M.: Allocation of Two Types of Aircraft in Tactical Air War: A Game Theoretic Analysis; OR vol. 8 1960, S. 694ff
Berkovitz, L.D. u. Dresher, M.: A Game-theory Analysis of Tactical Air War; OR vol.7 1959, S. 599ff

Es hat sich gezeigt, daß aufgrund der im Vergleich zur Landkriegführung besseren Möglichkeiten der Definition der Einheiten und der Ausgangslagen, spieltheoretische Analysen hier mit großem praktischen Nutzen durchgeführt werden konnten, sei es zum Zwecke der Entwicklung neuer Waffensysteme, sei es, um in Planübungen die Situationen der Realität zu simulieren. Von hier aus ist dann auch eine Verbindung zur Theorie der stochastischen Duelle möglich [128].

Die Regeln dieser Spiele sind, mit Unterschieden bei der einzelnen Autoren, im wesentlichen die folgenden:

Flugzeuge können, je nach Bauart, Ausrüstung und Bewaffnung, eine oder mehrere der folgenden Aufgaben ausführen: [129]

Counter Air	=	Kampf gegen das gegnerische Luftkampfpotential
Air Defense	=	Abwehrmaßnahmen gegen gegnerische Counter-Air-Aktionen
Close Air Support	=	Kampf gegen Ziele auf dem Gefechtsfeld
Interdiction	=	Kampf gegen die rückwärtigen Verbindungswege und das logistische System des Gegners
Reconnaissance	=	Aufklärung
Airlift	=	Lufttransport.

Fulkerson, D.R. u. Johnson, S.M.: A Tactical Air Game; OR vol. 5 1957, S. 704ff
Leibowitz, M.L. u. Lieberman, G.J.: Optimal Composition and Deployment of a Heterogeeous Local Air-Defense System; OR vol. 8 1960, S. 324ff
Weiss, H.K.: Some Differential Games of Tactical Interest and the Value of a Supporting Weapon System; OR vol. 7 1959, S. 180ff

128) Dathe, H.M.: Some Extensions of Stochastic Combat Analysis; Ottobrunn 1967 IABG-ORG/MS - 19

129) Die englischen Bezeichnungen sind heute auch in Deutschland gebräuchlich. Daher wurde auf eine Übersetzung verzichtet. S. zu den Aufgaben auch Berkovitz-Dresher, A Game-Theory..., op.cit. S.600

Die Aufgaben sind ihrer Art und ihrem Umfang nach bekannt; auf diese Aufgaben ist das vorhandene Luftkampfpotential optimal zu verteilen.

Die verschiedenen Strategien ergeben sich dann aus der Zuweisung jeweils unterschiedlicher Zahlen von geeigneten Einheiten auf die verschiedenen Aufgaben und der Neuverteilung in den verschiedenen Runden des Kampfes.

Als Gewinn oder Verlust können die Zahl der vernichteten gegnerischen Flugzeuge, die eigenen Verluste oder aber andere Kenngrößen für militärischen Erfolg, die von den Veränderungen der Luftlage abhängen, wie z.B. das Vorrücken oder Zurückweichen der eigenen Landstreitkräfte [130], gewählt werden.

Da die Führung eines Krieges nur mit Luftstreitkräften unmöglich ist, da diese stets, wenn auch möglicherweise in entscheidender Weise, die Landstreitkräfte unterstützen, kann bei den spieltheoretischen Luftkampfmodellen das Spielende durch Ereignisse herbeigeführt werden, die außerhalb der hier betrachteten Aktionen liegen. Es ist jedoch auch möglich, das Spiel dann als beendet anzusehen, wenn sich zwischen den gegnerischen Luftstreitkräften ein Gleichgewicht eingespielt hat, wobei dann die Neuproduktion von Flugzeugen berücksichtigt werden muß. Das Spielende kann schließlich auch im Erreichen eines nach Qualität und Quantität eindeutig bestimmten Zieles liegen, z.B. in der 90%-igen Ausschaltung der gegnerischen Aufklärungskräfte.

Beurteilung

Die Verwendung spieltheoretischer Modelle für militärische Zwecke führt durchaus zu verwertbaren Ergebnissen, die Hilfe sein können, den Kampf optimal zu führen.

---

130) Berkovitz-Dresher, A Game-Theory..., op.cit., S. 602f

Auch wenn nicht anzunehmen ist, daß die Führung großer und größter militärischer Verbände auf diese Weise grundsätzlich rationalisiert werden kann, da es an 'richtigen' Maßstäben für die Berechnung der Auszahlung fehlt, auch wenn auf dieser Ebene gelungene Untersuchungen, wie die von Haywood über die Lage an der Invasionsfront in Nordfrankreich 1944 [131], die Ausnahme sein dürften, ist dennoch dem Urteil eines militärischen Experten [132] nicht ohne weiteres zuzustimmen, der meint, daß "sich die Spieltheorie als Methode zur Berechnung des Einsatzbedarfs und zur Prüfung von Kampfverfahren nicht genügend eignet".

---

131) Haywood, O.G. jr.: Military Decision and Game Theory; OR vol. 2 1954, S. 365ff

132) Cockrill, J.T., Captain: The validity of War Game Analysis; US Naval Institute Proceedings 1966, S. 48 Übersetzung: ÜDBw 66/14988

Anhang 1

Statische Lösung von Gl.(8):

$$\frac{dx}{dt} = - a\, y$$

$$\frac{dy}{dt} = - b\, x \;;$$

$$dt = - \frac{dx}{a\, y}$$

$$dt = - \frac{dy}{b\, x} \;;$$

$$\frac{dx}{a\, y} = \frac{dy}{b\, x} \;;$$

$$b\, x\, dx = a\, y\, dy$$

$$b \int_{x=x(0)}^{x(t)} x\, dx = a \int_{y=y(0)}^{y(t)} y\, dy \;;$$

$$b \left[x(0)^2 - x(t)^2 \right] = a \left[y(0)^2 - y(t)^2 \right] .$$

Anhang 2

Auflösung von Gl.(9) nach t:

$$M(t) = M(0)\cosh\sqrt{AB}\,t - \sqrt{\frac{A}{B}}\,N(0)\sinh\sqrt{AB}\,t$$

$$= M(0)\,\frac{e^{+\sqrt{AB}\,t} + e^{-\sqrt{AB}\,t}}{2} - \sqrt{\frac{A}{B}}\,N(0)\,\frac{e^{+\sqrt{AB}\,t} - e^{-\sqrt{AB}\,t}}{2}$$

$$= e^{\sqrt{AB}\,t}\left[\frac{M(0)}{2} - \sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{N(0)}{2}\right] + \frac{1}{e^{\sqrt{AB}\,t}}\left[\frac{M(0)}{2} + \sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{N(0)}{2}\right].$$

Setzt man:

$$e^{\sqrt{AB}\,t} = x\,,$$

so ergibt sich:

$$M(t) = x\left[\frac{M(0)}{2} - \sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{N(0)}{2}\right] + \frac{1}{x}\left[\frac{M(0)}{2} + \sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{N(0)}{2}\right]$$

$$x^2 - \frac{2M(t)\sqrt{B}}{M(0)\sqrt{B} - N(0)\sqrt{A}}\,x + \frac{M(0)\sqrt{B} + N(0)\sqrt{A}}{M(0)\sqrt{B} - N(0)\sqrt{A}} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{M(t)\sqrt{B} \pm \sqrt{M(t)^2 B - M(0)^2 B + N(0)^2 A}}{M(0)\sqrt{B} - N(0)\sqrt{A}}$$

Dann ist:

$$t = \frac{1}{\sqrt{AB}}\ln x\,.$$

Anhang 3

Lösung von Differentialgleichungen

1. zu Gl.(8) und Gl.(37): [133]

Aus:

$$\dot{x} = -a\,y$$
$$\dot{y} = -b\,x$$

wird:

$$\dot{x} = 0x - ay$$
$$\dot{y} = -bx + 0y$$

Lösung dieses Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten unter Verwendung der speziellen Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0-r & -a \\ -b & 0-r \end{vmatrix} = 0$$

woraus folgt:

$$(-r)(-r) - (-a)(-b) = 0$$

$$r^2 = ab$$

$$r_1 = +\sqrt{ab}$$
$$r_2 = -\sqrt{ab}$$

---

133) S. dazu Bronstein, J.N. und Semendjajew, K.A., op.cit., S. 391ff

Jede Wurzel entspricht einem System von partikulären Lösungen:

1. Lösung:

$$x_1 = A_1 \, e^{+\sqrt{ab}\, t}$$

$$y_1 = A_2 \, e^{+\sqrt{ab}\, t}$$

2. Lösung:

$$x_2 = B_1 \, e^{-\sqrt{ab}\, t}$$

$$y_2 = B_2 \, e^{-\sqrt{ab}\, t}$$

Bestimmung der Koeffizienten A und B hieraus durch Lösung eines Systems linearer Gleichungen:

$$(0 - \sqrt{ab}\,)\, A_1 + (-a)\, A_2 = 0$$

$$(-b)\, A_1 + (0 - \sqrt{ab}\,)\, A_2 = 0$$

woraus folgt:

$$A_2 = \frac{-\sqrt{ab}}{a} A_1 = -\sqrt{\frac{b}{a}}\, A_1$$

und:

$$(0 + \sqrt{ab}\,)\, B_1 + (-a)\, B_2 = 0$$

$$(-b)\, B_1 + (0 + \sqrt{ab}\,)\, B_2 = 0$$

woraus folgt:

$$B_2 = \frac{+\sqrt{ab}}{a} B_1 = +\sqrt{\frac{b}{a}}\, B_1$$

Aus den beiden partikulären Lösungen folgt die allgemeine Lösung des Gleichungssystems:

$$x(t) = x_1 + x_2 = A_1 e^{+\sqrt{ab}\,t} + B_1 e^{-\sqrt{ab}\,t}$$

$$y(t) = y_1 + y_2 = -\sqrt{b/a}\,A_1 e^{+\sqrt{ab}\,t} + \sqrt{b/a}\,B_1 e^{-\sqrt{ab}\,t}$$

Unter Benutzung der Ausgangssituation, für die gilt: $t = 0$, folgt:

$$x(0) = A_1 e^{+\sqrt{ab}\,0} + B_1 e^{-\sqrt{ab}\,0}$$

$$x(0) = A_1 + B_1$$

und:

$$y(0) = -\sqrt{b/a}\,A_1 e^{+\sqrt{ab}\,0} + \sqrt{b/a}\,B_1 e^{-\sqrt{ab}\,0}$$

$$y(0) = -\sqrt{b/a}\,A_1 + \sqrt{b/a}\,B_1$$

Da gilt:

$$A_1 = x(0) - B_1 ,$$

folgt:

$$y(0) = -\sqrt{b/a}\,(x(0) - B_1) + \sqrt{b/a}\,B_1$$

$$= -\sqrt{b/a}\,x(0) + 2\sqrt{b/a}\,B_1$$

Dann ist:

$$B_1 = \frac{y(0) + \sqrt{b/a}\,x(0)}{2\sqrt{b/a}}$$

$$= \frac{1}{2}y(0)\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{2}x(0)$$

und:

$$A_1 = x(0) - \left[\frac{1}{2}y(0)\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{2}x(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}x(0) - \frac{1}{2}y(0)\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Diese Ausdrücke für A_1 und B_1 eingesetzt in:

$$x(t) = A_1 e^{+\sqrt{ab}\,t} + B_1 e^{-\sqrt{ab}\,t}$$

ergibt:

$$x(t) = 1/2\ x(0)\ e^{+\sqrt{ab}\,t} - 1/2\ y(0)\ \sqrt{a/b}\ e^{+\sqrt{ab}\,t}$$

$$+ 1/2\ x(0)\ e^{-\sqrt{ab}\,t} + 1/2\ y(0)\ \sqrt{a/b}\ e^{-\sqrt{ab}\,t}$$

$$x(t) = x(0)\ \frac{e^{+\sqrt{ab}\,t} + e^{-\sqrt{ab}\,t}}{2} - \sqrt{\frac{a}{b}}y(0)\ \frac{e^{+\sqrt{ab}\,t} - e^{-\sqrt{ab}\,t}}{2}$$

$$x(t) = x(o)\ \cosh\sqrt{ab}\,t - \sqrt{a/b}\ y(o)\ \sinh\sqrt{ab}\,t$$

Entsprechend kann ausgerechnet werden:

$$y(t) = y(0)\ \cosh\sqrt{ab}\,t - \sqrt{b/a}\ x(0)\ \sinh\sqrt{ab}\,t\ .$$

2. zu Gl.(5E):

$$\dot{x}(t) = - a\, x(t)\, y(t)$$
$$\dot{y}(t) = - b\, x(t)$$

Ist:

$$a\, y(t) = X$$
$$a\, b\, x(t) = Y \quad ,$$

so wird über:

$$a\, b\, \dot{x}(t) = - \left[a\, y(t)\right] \left[a\, b\, x(t)\right]$$
$$a\, \dot{y}(t) = - a\, b\, x(t)$$

$$\dot{Y} = - XY$$
$$\dot{X} = - Y \quad .$$

Es folgt daraus:

$$\dot{Y} = X(-Y) = X\dot{X}$$

und:

$$dY = X\, dX.$$

Durch Integrieren ergibt sich:

$$\int_{y=y(0)}^{y(t)} dY = \int_{X=X(0)}^{X(t)} X\, dX$$

$$Y(t) - Y(0) = \frac{X(t)^2}{2} - \frac{X(0)^2}{2}$$

$$Y(t) = \frac{X(t)^2}{2} + Y(0) - \frac{X(0)^2}{2} = \frac{X(t)^2}{2} + c$$

wobei: $c = Y(0) - \frac{X(0)^2}{2}$.

Aus:
$$\dot{X}(t) = - Y(t)$$
folgt:

$$-\dot{X}(t) = \frac{X(t)^2}{2} + c$$

$$\frac{\dot{X}(t)}{-\frac{X(t)^2}{2} - c} = \frac{2\dot{X}(t)}{-X(t)^2 - 2c} = 1$$

$$2 \int_{X(u)=X(0)}^{X(t)} \frac{dX(u)}{-X(u)^2 - 2c} = \int_{u=0}^{t} du \qquad 134)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2c}} \operatorname{arc\,tan} \frac{-X(t)}{\sqrt{2c}} = t + \frac{2}{\sqrt{2c}} \operatorname{arc\,tan} \frac{-X(0)}{\sqrt{2c}}$$

$$\operatorname{arc\,tan} \frac{-X(t)}{2c} = \frac{\sqrt{2c}}{2} (t + C)$$

wobei: $C = \frac{2}{\sqrt{2c}} \operatorname{arc\,tan} \frac{-X(0)}{\sqrt{2c}}$

Aus der grundsätzlichen Beziehung:

$$\operatorname{arc\,tan} \tilde{x} = \tilde{y}$$

und:

$$\tilde{x} = \tan \tilde{y}$$

folgt:

$$\frac{-X(t)}{\sqrt{2c}} = \tan \frac{\sqrt{2c}}{2} (t + C)$$

$$X(t) = -\sqrt{2c} \tan \frac{\sqrt{2c}}{2} (t + C)$$

---

134) Mangoldt, H.v. und Knopp, K.: Einführung in die höhere Mathematik, vol. III; 13. Aufl. Stuttgart 1967, S. 39

Da gilt (s.o.):

$$\frac{X(t)^2}{2} + c = Y(t)$$

ergibt sich durch Einsetzen:

$$Y(t) = \frac{(-\sqrt{2c}\ \tan\frac{\sqrt{2c}}{2}(t+C))^2}{2} + c$$

$$= c\ \tan^2\frac{\sqrt{2c}}{2}(t+C) + c$$

$$= c\,\frac{1-\cos\sqrt{2c}\,(t+C)}{1+\cos\sqrt{2c}\,(t+C)} + c$$

$$= c\,\frac{1-\cos\sqrt{2c}\,(t+C)}{1+\cos\sqrt{2c}\,(t+C)} + c\,\frac{1+\cos\sqrt{2c}\,(t+C)}{1+\cos\sqrt{2c}\,(t+C)}$$

$$Y(t) = \frac{2c}{1+\cos\sqrt{2c}\,(t+C)}$$

Es ist aber:

$$X(t) = a\,y(t)$$

$$Y(t) = ab\,x(t)$$

so daß gilt:

$$x(t) = \frac{2c}{ab}\,\frac{1}{1+\cos\sqrt{2c}\,(t+C)}$$

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2c}}{a}\tan\frac{\sqrt{2c}}{2}(t+C)$$

3. zu Gl.(39):

$$\dot{x}(t) = - a\, x(t)\, y(t)$$
$$\dot{y}(t) = - b\, x(t)\, y(t)$$

Ist:

$$a\, y(t) = X$$
$$b\, x(t) = Y \quad ,$$

so wird über:

$$b\, \dot{x}(t) = - [b\, x(t)]\, [a\, y(t)]$$
$$a\, \dot{y}(t) = - [b\, x(t)]\, [a\, y(t)]$$

$$\dot{Y} = -XY$$
$$\dot{X} = - XY \quad .$$

Es folgt daraus:

$$\dot{Y} - \dot{X} = 0$$

und:

$$dY = dX.$$

Durch Integration ergibt sich:

$$\int_{y=y(0)}^{y(t)} dY = \int_{X=X(0)}^{X(t)} dX$$

$$Y(t) - Y(0) = X(t) - X(0)$$

$$Y(t) = X(t) - X(0) + Y(0) = X(t) + c$$

wobei: $c = - X(0) + Y(0)$

Aus:

$$\dot{X}(t) = - X(t)\, Y(t)$$

folgt:

$$\dot{X}(t) = - X(t)^2 - c\, X(t) \quad .$$

Dann ist:

$$\frac{dX(t)}{- X(t)^2 - c\, X(t)} = dt$$

$$\int_{X(u)\cdot X(0)}^{X(t)} \frac{dX(u)}{-X(u)^2 - cX(u)} = \int_{u=0}^{t} du \qquad 135)$$

$$t = \frac{2}{c} \operatorname{arc\,tanh} \frac{2X(u) + c}{c} \Bigg|_{X(0)}^{X(t)} \qquad 136)$$

$$t = \frac{1}{c} \ln \frac{X(t)}{X(t) + c} - \frac{1}{c} \ln \frac{X(0)}{X(0) + c}$$

$$t = \frac{1}{c} \ln \frac{X(t)}{X(t) + c} - C$$

wobei: $$C = \frac{1}{c} \ln \frac{X(0)}{X(0) + c}$$

$$c\,(t + C) = \ln \frac{X(t)}{X(t) + c}$$

$$\frac{X(t)}{X(t) + c} = e^{c(t+C)}$$

$$X(t) = \frac{c\, e^{c(t+C)}}{1 - e^{c(t+C)}}$$

$$Y(t) = \frac{c}{1 - e^{c(t+C)}} \quad , \text{da: } Y(t) = X(t) + c$$

Es ist aber:

a $y(t) = X(t)$
b $x(t) = Y(t)$

---

135) Mangoldt-Knopp, vol.III, op.cit., S.39

136) Mangoldt, H.v. und Knopp,K.: Einführung in die höhere Mathematik, vol.II; 12.Aufl. Stuttgart 1965; S. 572

so daß gilt:

$$x(t) = \frac{c}{b} \frac{1}{1-e^{c(t+C)}}$$

$$y(t) = \frac{c}{a} \frac{e^{c(t+C)}}{1-e^{c(t+C)}}$$

Literaturverzeichnis

Abkürzungen:

CORS-Journal	:	CORS-Journal - Journal of the Canadian Operational Research Society
NRLQy	:	Naval Research Logistics Quarterly
Opsearch	:	Opsearch - Journal of the Operational Research Society of India
OR	:	Operations Research - Journal of the Operations Research Society of America
WtMhe	:	Wehrtechnische Monatshefte

1. Abert, J.G., Kamrass, M. u. Navarro, J.A.: Evaluating Aircraft Requirements in the Light of Varying or Uncertain Mission Mixes; OR, vol. 15 1967, S. 738ff
2. Ancker, C.J., jr. u. Gafarian, A.V.: The Distribution of Rounds Fired in Stochastic Duels; NRLQy, Vol. 11 1964, S. 303ff
3. -"- u. -"-: The Distribution of the Time-Duration of Stochastic Duels; NRLQy, vol. 12 1965, S. 275ff
4. -"- u. Williams, T.: Some Discrete Processes in the Theory of Stochastic Duels; OR, vol. 13 1965, S. 202ff
5. -"-: The Status of Developments in the Theory of Stochastic Duels; OR, vol. 15 1967, 388ff
6. -"-: Stochastic Duels of Limited Time-Duration; CORS-Journal, vol. 4 1966, S 69ff
7. -"-: Stochastic Duels with Limited Ammunition Supply; OR, vol. 12 1964, S. 38ff
8. -"-: Stochastic Duels with Time-of-Flight Included; Opsearch, vol. 3 1966, S. 71ff
9. Ash, M.: Flood's Assignment Model for Small Kill Levels; OR, vol. 7 1959, S. 258ff
10. Bach, R.E., jr., Dolansky, L. u. Stubbs, H.L.: Some Recent Contributions to the Lanchester Theory of Combat; OR, vol. 10 1962, S. 314ff
11. Berkovitz, L.D. u. Dresher, M.: Allocation of Two Types of Aircraft in Tactical Air War: A Game Theoretic Analysis OR, vol. 8 1960, S. 694ff
12. -"- u. -"-: A Game-Theory Analysis of Tactical Air War; OR, vol. 7 1959, S. 599ff
13. Bhashyam, N. u. Singh, N.: Stochastic Duels With Varying Single-shot Kill Probabilities; OR, vol. 15 1967, S.238ff
14. Blinkenberg, R.L., Arnold, G.L. u. Clauss, J.S., jr.: Lockheed Air Combat Analysis Model; Burbank/Calif. 1966 Lockheed Systems Research

15. Bonder, S.: The Lanchester Attrition-Rate Coefficient; OR, vol. 15 1967, S. 221ff

16. Brackney, H.: The Dynamics of Military Combat; OR, vol. 7 1959, S. 30ff

17. Brodheim, E., Herzer, I. u. Russ, L.M.: A General Dynamic Model for Air Defense; OR, vol. 15 1967, S. 779ff

18. den Broeder, G.G., jr., Ellison, R.E. u. Emerling, L.: On Optimum Target Assignments; OR, vol. 7 1959, S. 322ff

19. Bronstein, J.N. u. Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik; 6. Aufl. Zürich, Frankfurt/M. 1966

20. Brooks, F.C.: The Stochastic Properties of Large Battle Models; OR, vol. 13 1965, S. 1ff

21. Clausewitz, C.v.: Vom Kriege; 16. Aufl. Bonn 1952

22. Cockrill, J.T.: The Validity of War Game Analysis; US Naval Institute Proceedings, 1966, S. 44ff

23. Collatz, L. u. Wetterling, W.: Optimierungsaufgaben; Berlin, Heidelberg, New York 1966

24. Danskin, J.M.: Combat Problems, Weapons Systems, and the Theory of Allocation; OR, vol. 2 1954, S. 204ff

25. Dantzig, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen; Berlin, Heidelberg, New York 1966

26. Dashiell, F.K. u. Fain, W.W.: Solution of the Extended Lanchester Equations Used in a Tactical Warfare Simulation Programme; CORS-Journal, vol. 4 1966, S. 89ff

27. Dathe, H.M. u. Nauschütz, E.: Analytical Approach to the Evaluation of Combats Between Fighter Forces; Ottobrunn 1966, IABG-ORG/MS - 4

28. -"-: Einführung in die Theorie der strategischen Duelle; Ottobrunn 1966, IABG-ORG/MS - 8

29. -"-: Some Extensions of Stochastic Combat Analysis; Ottobrunn 1967, IABG-ORG/MS - 19

30. -"-: Über die Anwendung der Theorie der strategischen Spiele; WtMhe, vol. 64 1967, S. 49ff

31. Day, R.H.: Allocating Weapons to Target Complexes by Means of Nonlinear Programming; OR, vol. 14 1966, S. 992ff

32. Deitchman, S.J.: A Lanchester Model of Guerilla Warfare; OR, vol. 10 1962, S. 818ff

33. Dolanský, L.: Present State of the Lanchester Theory of Combat; OR, vol. 12 1964, S. 344ff

34. Dubins, L.E. u. Morgenthaler, G.W.: Inclusion of Detection in Probability of Survival Models; OR, vol. 9 1961, S. 782ff

35. Edmundson, H.P.: The Distribution of Radial Error and its Statistical Application in War Gaming; OR, vol. 9 1961, S. 8ff

36. Engel, J.H.: Comments on a Paper by H.K. Weiss; OR, vol. 11 1963, S. 147ff

37. -"-: A Verification of Lanchester's Law; OR, vol. 2 1954, S. 163ff

38. Fields, D.S.: Cost/Effectiveness Analysis: Its Tasks and their Interrelation; OR, vol. 14 1966, S. 515ff

39. Fischer, D.: Allgemeines zur Durchführung von Operations Research-Studien; WtMhe, vol. 65 1968, S. 49ff u. 127ff

40. Fox, P.D.: A Theory of Cost-Effectiveness for Military Systems Analysis; OR, vol. 13 1965, S. 191ff

41. Fulkerson, D.R. u. Johnson, S.M.: A Tactical Air Game; OR, vol. 5 1957, S. 704ff

42. Groves, A.D. u. Smith, E.S.: Salvo Hit Probabilities for Offset Circular Targets; OR, vol. 5 1957, S. 222ff

43. Grubbs, F.E.: Approximate Circular and Noncircular Offset Probabilities of Hitting; OR, vol. 12 1964, S. 51ff

44. Hare, R.R.: A Mathematical Model of Terrain Shielding; OR, vol. 6 1958, S. 530ff

45. Haywood, O.G., jr.: Military Decision and Game Theory; OR, vol. 2 1954, S. 365ff

46. Heinhold, J. u. Gaede, K.-W.: Ingenieurstatistik; München, Wien 1964

47. Helmbold, R.L.: A 'Universal' Attrition Model; OR, vol. 14 1966, S. 624ff

48. Henn, R. u. Künzi, H.P.: Einführung in die Unternehmensforschung, vol. II; Berlin, Heidelberg, New York 1968

49. Heuston, M.C. u. Ogawa, G.: Observations on the Theoretical Basis of Cost-Effectiveness; OR, vol. 14 1966, S. 242ff

50. Hitch, C.: Sub-Optimizations in Operations Problems; OR, vol. 1 1952/53, S. 87ff

51. Karchere, A. u. Hoeber, F.P.: Combat Problems, Weapon Systems, and the Theory of Allocation; OR, vol. 1 1952/53, S. 286ff

52. Kemeny, J.G., Snell, J.L. u. Thompson, G.L.: Einführung in die endliche Mathematik; Ludwigshafen 1963

53. Kisi, T. u. Hirose, T.: Winning Probability in an Ambush Engagement; OR, vol. 14 1966, S. 1137f

54. Kleine Enzyklopädie: Mazhematik; Basel 1965

55. Lanchester, F.W.: Aircraft in Warfare; London 1916

56. Laurent, A.G.: Bombing Problems - A Statistical Approach; OR, vol. 5 1957, S. 75ff

57. -"-: Bombing Problems - A Statistical Approach II; OR, vol. 10 1962, S. 380ff

58. Leibowitz, M.L. u. Lieberman, G.J.: Optimal Composition of a Heterogeneous Local Air-Defense System; OR, vol 8 1960, S. 324ff

59. Lemus, F. u. David, K.H.: An Optimum Allocation of Different Weapons to a Target Complex; OR, vol. 11 1963, S. 787ff

60. Lilliefors, H.W.: A Hand-Computation Determination of Kill Probabilities for Weapons Having Spherical Lethal Volume; OR, vol. 5 1957, S. 416ff

61. Lützow, J.: Anwendungsbereiche und Grenzen von Operations Research für die Landesverteidigung; Dortmund 1963

62. -"-: Human Factors; WtMhe, vol. 64 1967, S. 382ff

63. -"-: Statistische Erfassung des Geländes unter taktischen Gesichtspunkten; WtMhe, vol. 64 1967, S. 301ff

64. -"-: Eine Studie für Kampfwertvergleiche im Landkampf; WtMhe, vol. 64 1967, S. 425ff

65. Mangoldt, H.v. u. Knopp, K.: Einführung in die höhere Mathematik, vol. II; 12. Aufl. Stuttgart 1965

66. -"- u. -"-: Einführung in die höhere Mathematik, vol. III; 13. Aufl. Stuttgart 1967

67. Manne, A.S.: A Target-Assignment Problem; OR, vol. 6 1958, S. 346ff

68. McCloskey, J.F.: Of Horseless Carriages, Flying Machines, and Operations Research: A Tribute to Frederick William Lanchester (1868-1946); OR, vol. 4 1956, S. 141ff

69. McNolty, F.: Kill Probability for Multiple Shots; OR, vol. 15 1967, S. 165ff

70. -"-: Kill Probability when the Lethal Effect is Variable; OR, vol. 13 1965, S. 478ff

71. -"-: Kill Probability when the Weapon Bias is Randomly Disributed; OR, vol. 10 1962, S. 693ff

72. Menges, G.: Grundriß der Statistik - Teil 1: Theorie; Köln, Opladen 1968

73. -"-: Ökonometrie; Wiesbaden 1961

74. -"-: Ökonometrische Prognosen; Köln, Opladen 1967

75. -"-: Verfahren der Analyse der Arbeitskräftepolitik; Bericht an die OECD; Saarbrücken 1965

76. Molitz, H. u. Strobel, R.: Äußere Ballistik; Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963

77. Morgenstern, O.: Strategie - heute; Frankfurt/Main 1962

78. Morse, P.M. u. Kimball, G.E.: Methods of Operations Research; Cambridge/Mass. 1951

79. Oerlikon-Taschenbuch; Zürich-Oerlikon 1956

80. Robertson, J.I.: A Method of Computing Survival Probabilities of Several Targets Versus Several Weapons; OR, vol. 4 1956, S. 546ff

81. Schoderbek, J.J.: Some Weapon System Survival Probability Models - I. Fixed Time Between Firings; OR, vol. 10 1962, S. 155ff

82. -"-: Some Weapon System Survival Probability Models - II. Random Time Between Firings; OR, vol. 10, 1962, S. 168ff

83. Schreiber, T.S.: Note on the Combat Value of Intelligence and Command and Control Systems; OR; vol. 12 1964, S. 507ff

84. Smith, N.M., jr., Walters, S.S., Brooks, F.C. u. Blackwell, D.H.: The Theory of Value and the Science of Decision - A Summary; OR, vol. 1 1952/53, S. 103ff

85. -"-: A Calculus for Ethics: A Theory of the Structure of Value; Behavioral Science, vol. 1 1956, S. 111ff u. 186ff

86. Tinbergen, J.: Einführung in die Ökonometrie; Wien, Stuttgart 1952

87. Walsh, J.E.: Approximate Salvo Kill Probabilities for Small and Medium Sized Targets when Cumulative Damage is Unimportant; OR, vol. 3 1955, S. 69ff

88. -"-: Optimum Properties for Defense Strategy of Equal Attack Against All Targets; OR, vol. 7 1959, S. 249ff

89. -"-: Inadequacy of Cost per 'Kill' as Measure of Effectiveness; OR, vol. 5 1957, S. 750ff

90. Weidlinger, P.: The Lethal Radius of a Salvo; OR, vol. 10 1962, S. 547ff

91. Weiss, H.K.: Combat Models and Historical Data: The U.S. Civil War; OR, vol. 14 1966, S. 759ff

92. -"-: The Fiske-Model of Warfare; OR, vol. 10 1962, S. 569ff

93. -"-: Lanchester-Type Models of Warfare; Proceedings of the First International Conference on Operational Research, 1957, S. 82ff

94. -"-: Some Differential Games of Tactical Interest and the Value of a Supporting Weapon System; OR, vol. 7 1959, S. 180ff

95. Wentzel, J.: Operationsforschung; Berlin 1966

96. Wetzel, W.: Theoretische Grundlagen des linearen Programmierens, der Einsatz-Ausstoß-Analyse und der Spieltheorie; in: Anwendung der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme; 3. Aufl. Würzburg, Wien 1966

97. Whyburn, W.M.: On the Fundamental Existence Theorems for Differential Systems; Annals of Mathematics, Series 2, vol. 30, 1928-9, S. 31ff

98. Williams, T. u. Ancker, C.J., jr.: Stochastic Duels; OR, vol. 11 1963, S. 803ff

99. Yamane, T.: Mathematics for Economists; 2. Aufl. Englewood Cliffs/N.J. 1968